

**La modulazione di fase e di frequenza  
nella musica elettronica**

**dispense**

**Tecniche analogiche e numeriche**

© 2008 Lorenzo Seno - Versione 1.1

## Indice generale

1	Note sul copyright.....	1
2	Introduzione .....	1
3	Unità di misura.....	2
	3.1 Sistemi matematici.....	2
	3.2 Sistemi per l'elaborazione numerica del segnale.....	2
4	Espressione della PM e della FM nel dominio del tempo.....	2
	4.1 Modulazione di fase (PM).....	2
	4.2 Modulazione di frequenza (FM).....	4
	4.3 Equivalenza PM - FM e passaggio dall'una all'altra.....	5
5	Spettro della PM, e sua derivazione.....	6
	5.1 Derivazione della formula per la composizione spettrale della PM.....	6
6	Funzioni di Bessel.....	8
7	Approssimazioni delle funzioni di Bessel per piccoli e grandi indici di modulazione.....	10
8	Parametri nelle diverse unità di misura.....	11
	8.1 Indice di Modulazione.....	11
	8.2 Larghezza di banda.....	12
9	Utilizzazione musicale: questioni percettive.....	12
	9.1 Suoni armonici e inarmonici.....	12
	9.2 Larghezze di banda assolute e relative.....	13
	9.3 Ribaltamento delle frequenze negative .....	14
	9.3.1 Interferenza tra parziali ribaltate e non ribaltate in caso di coincidenza di frequenza .....	14
	9.4 Fold-over.....	15
10	PM con frequenza zero di portante.....	16
11	SSPM - Modulazione di fase a singola banda laterale.....	19
12	Modulazione di fase a due operatori.....	19
13	Appendici.....	23
	13.1 Script scilab per il calcolo dello spettro della PM a portante zero.....	23
	13.2 Script scilab per il calcolo dello spettro della PM a due modulanti. . .	24
14	Bibliografia.....	26

## 1 Note sul *copyright*

Questo testo è rilasciato sotto la licenza Creative Commons “Attribuzione - Non commerciale - Non opere derivate 2.5”

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/it/legalcode>.

E' permessa la diffusione e la riproduzione per uso non commerciale in forma non modificata.

## 2 Introduzione

La modulazione di frequenza è stata introdotta nella musica elettronica da John Chowning negli anni '60, ed è stata la base del successo delle tastiere Yamaha DX7 nelle loro diverse versioni nel corso degli anni 70. Nei primi anni '80 i sintetizzatori delle schede audio dei PC IBM, agli albori della informatizzazione di massa, montavano ancora un chip della Yamaha per la sintesi FM. Si trattava di una sintesi *imitativa*, dai risultati piuttosto modesti. Per l'imitazione degli strumenti acustici (e anche non acustici) sarà presto surclassata dalla sintesi a campionamento (a *wave-table*) e la sintesi FM sarà relegata all'uso di alcuni affezionati e di quei compositori che sono rimasti legati in qualche modo al suo specifico *sound* (insieme di timbri).

Nonostante la sua relativa vetustà, l'applicazione di concetti e metodi più recenti permette ancora oggi di scoprire nuove forme di utilizzazione (impensabili all'epoca di Chowning), quali la SSFM (*Single Sideband Frequency Modulation*), e la FM con governo dei rapporti tra ordini pari e ordini dispari, indipendentemente dall'armonicità del pettine generato. Questo significativo aumento dei gradi di libertà permette ulteriori modificazioni timbriche, che si propone ai musicisti elettronici di scoprire.

Questo testo tratta fundamentalmente la Modulazione di fase (*PM - Phase Modulation*), detta anche *modulazione d'angolo*, in quanto formalmente più semplice, e di più semplice uso. La PM e la FM sono tuttavia equivalenti, nel senso che con pochi semplici passaggi è possibile ottenere dall'una ciò che si ottiene dall'altra. Sono quindi forniti tutti i criteri e le regole di passaggio dall'una all'altra.

Sono trattate le PM ad uno e due operatori, ma non la cosiddetta *feedback FM* (o PM), pur presente delle tastiere sopramenzionate, che è di fatto un oscillatore a controreazione (*feedback oscillator*).

Come usuale, questo testo vorrebbe prestarsi a diversi livelli di lettura, da quello matematicamente più profondo, ad uno più intuitivo. Il lettore può quindi seguire per intero lo sviluppo del formalismo, oppure fermarsi alla decifrazione delle formule fondamentali, o ancora limitarsi alla comprensione della loro espressione in lingua corrente (in *corsivo grassetto* nel testo).

Quanto alla terminologia, si rammenta che PM e FM sono tecniche derivate dalle radiotrasmissioni, e quindi anche nelle applicazioni musicali è rimasto l'uso dei termini *portante* e *modulante*, quando sarebbe più appropriato *modulante* e

*modulato*. Questa improprietà di linguaggio torna però utile, perché l'uso della terminologia più corretta porterebbe ad una ambiguità nei pedici delle grandezze. A questo scopo, in questo testo (non si tratta di una convenzione generale) si userà la lettera minuscola per “modulante” e quella maiuscola per “Modulato” (la “Portante” della FM delle radiotrasmissioni).

### 3 Unità di misura

Vale la pena di chiarire ancora una volta la questione delle unità di misura, dato che nella PM e FM queste rivestono un'importanza particolare.

#### 3.1 Sistemi matematici

Gli angoli, nelle funzioni matematiche, sono misurati in radianti (pari al rapporto tra lunghezza dell'angolo e raggio del cerchio). Questa è l'unità di misura adottata nei sistemi informatici per la matematica, quali ad esempio scilab, maxima, ed anche nel linguaggio di programmazione C. In questi sistemi, tutti gli argomenti delle funzioni trigonometriche devono essere espressi in radianti.

Come conseguenza, la velocità di variazione (corrispondente ma non identica alla usuale *frequenza*) si esprime in radianti al secondo ed è detta *pulsazione*, generalmente indicata con la lettera greca omega:  $\omega$ .

#### 3.2 Sistemi per l'elaborazione numerica del segnale

Nei sistemi per l'elaborazione numerica del segnale, e nei sistemi tecnici in genere, è invece invalso l'uso di misurare la frequenza in Hz, ovvero in *giri al secondo*. Come conseguenza, l'unità di misura coerente per gli angoli (e dunque per le fasi) è il numero di *giri*. In questi sistemi, pertanto, le fasi sono numeri compresi tra 0 e 1, con quest'ultimo valore corrispondente all'angolo giro (pari a  $2\pi$  radianti). Le frequenze si indicano generalmente con la lettera greca  $\nu$ . Nei sistemi numerici si usa spesso per la frequenza la  $f$ , con l'avvertenza che talvolta con questa lettera si indica anche la *frequenza numerica*, che indica il rapporto talvolta tra frequenza e frequenza di Nyquist ( $0 \leq f < 1$ ), e talvolta il rapporto tra frequenza e frequenza di campionamento ( $0 \leq f < 0.5$ ). Nessuna di queste due ultime usanze è però in vigore nei sistemi attuali (2008) per la musica elettronica.

La presenza di due sistemi di misura comporta l'onere di procedere alla conversione di unità quando si passa da un sistema all'altro, secondo l'usuale relazione:

$$\omega = 2\pi f; \quad \phi_{rad} = 2\pi \phi_{Hz} \quad 1$$

### 4 Espressione della PM e della FM nel dominio del tempo

#### 4.1 Modulazione di fase (PM)

Per modulazione di fase, formalmente, si intende una espressione del genere:

$$PM(t) = \cos(\omega_p t + \phi_p + A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M)) \quad 2$$

Qui  $\omega_p$  è la pulsazione della portante,  $\phi_p$  è la fase iniziale (cioè per  $t = 0$ ) della portante,  $\omega_M$  è la pulsazione della modulante, e  $\phi_M$  la fase iniziale della modulante. L'uso dei coseni, grazie a queste fasi arbitrarie, non restringe la validità della formula che può quindi esprimere relazioni di fase qualsivoglia tra modulante e portante.

Si tratta dunque di un oscillatore sinusoidale alla cui consueta fase  $\omega_p t + \phi_p$  è sommata una ulteriore oscillazione (ottenendo così un oscillatore **la cui fase è dunque oscillante**). Chiamando  $\phi(t)$  questa fase:

$$PM(t) = \cos(\phi(t)) \quad 3$$

$$\phi(t) = \omega_p t + \phi_p + A_{PM} \cdot \cos(\omega_M \cdot t + \phi_M) \quad 4$$

Nel linguaggio delle *patch*, tipico dei sistemi di programmazione a flusso di dati (*data flow*), l'espressione corrisponde alla seguente figura.

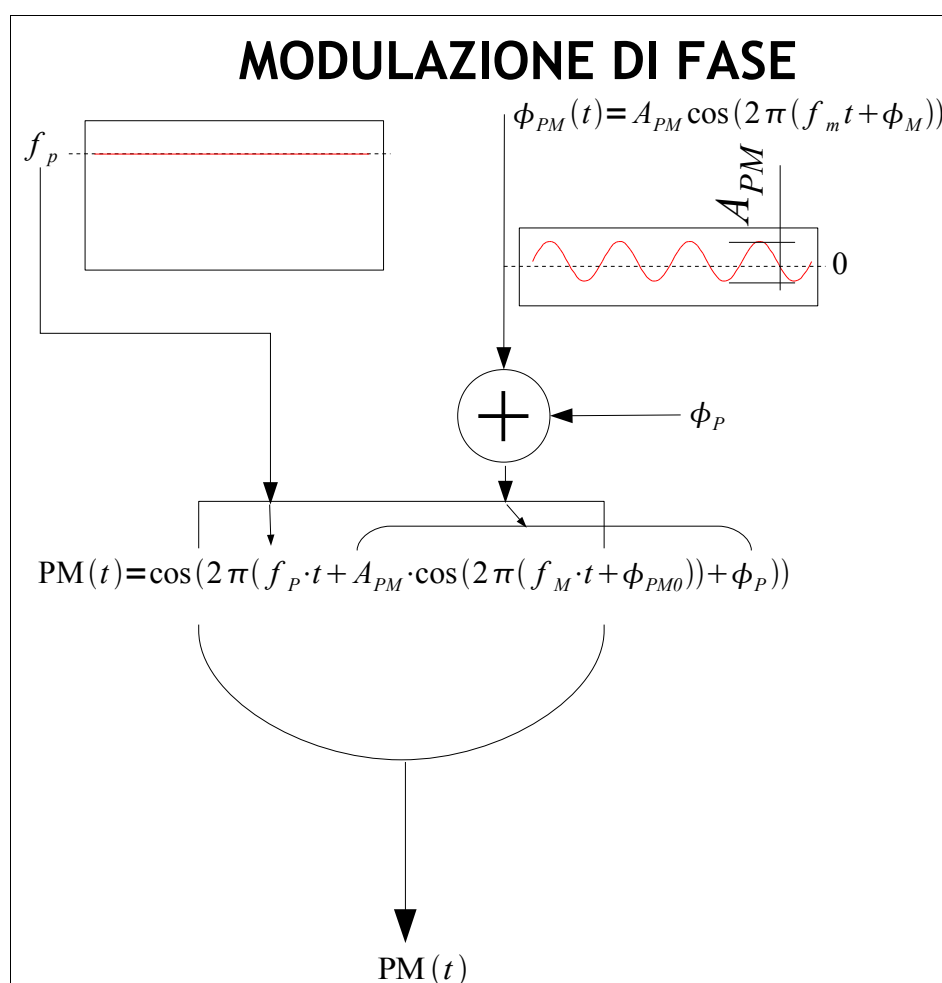


Fig. 1 - Modulazione di fase

Nella figura si presuppone che frequenze e fasi siano fornite in unità tecniche (Hz, giri), mentre le funzioni trigonometriche accettano fasi in radianti. Pertanto l'espressione del segnale di uscita include le opportune conversioni di unità di misura.

## 4.2 Modulazione di frequenza (FM)

Per modulazione di frequenza si intende una espressione del genere:

$$FM(t) = \cos\left(\int_0^t \omega_P + A_{FM} \cos(\omega_M \tau + \phi_M) + \phi_P\right) d\tau \quad 5$$

Con il medesimo significato dei simboli rispetto alla PM.

Si rammenta qui la relazione generale tra fase e pulsazione:

$$\omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \text{ e dunque } \phi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \phi(0) \quad 6$$

Qualsiasi oscillatore deve pertanto eseguire l'integrazione della frequenza per ottenere la fase. Questa fornisce il prodotto tra pulsazione e tempo *se e solo se la pulsazione è costante*:

$$\phi(t) = \int_0^t \omega d\tau = \omega \cdot t + \phi(0)$$

L'espressione della FM corrisponde, nel linguaggio delle *patch*, alla seguente figura:

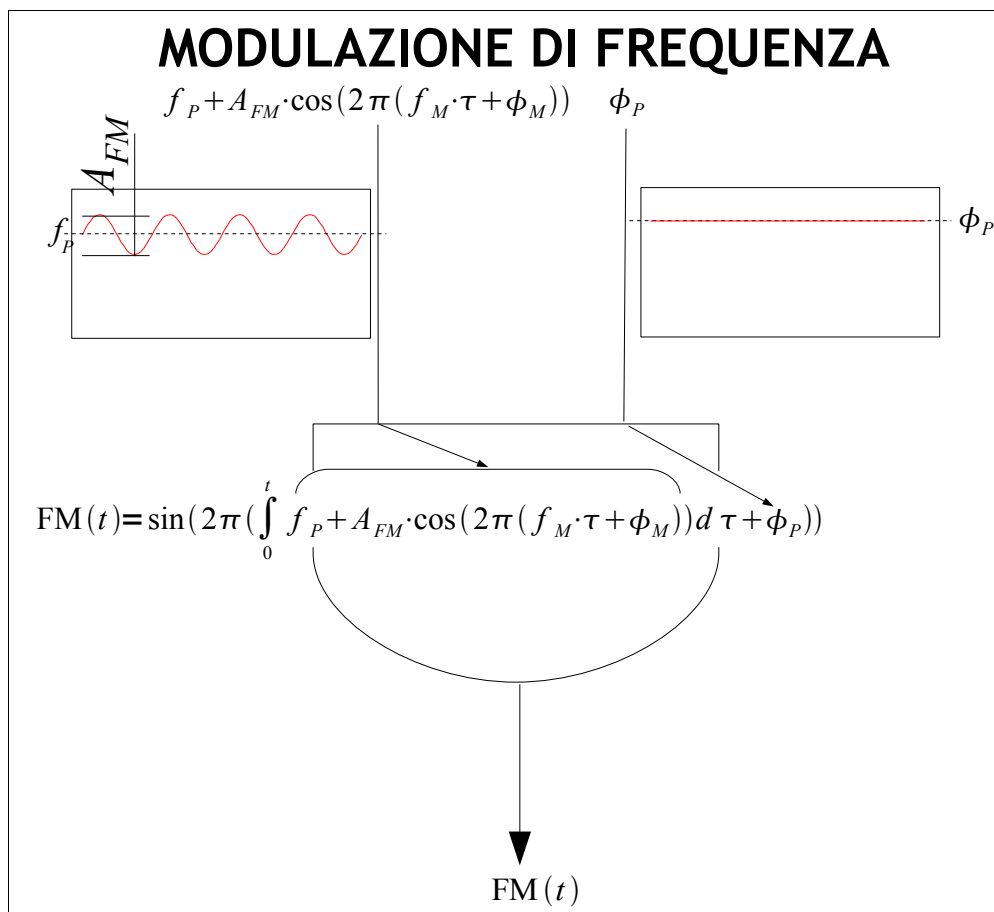


Fig. 2 - Patch per modulazione di frequenza

Valgono anche qui le considerazioni sul passaggio di unità di misura.

Si tratta dunque di un oscillatore sinusoidale alla cui frequenza costante è sommata un'ulteriore oscillazione (un oscillatore *la cui frequenza è dunque oscillante attorno ad un valore costante*).

Tuttavia nella 5 la  $\omega_p$  è costante e può quindi essere portata fuori del segno di integrazione:

$$FM(t) = \cos((\omega_p t + \phi_p) + A_{FM} \int_0^t \cos(\omega_M \tau + \phi_M) d\tau) \quad 7$$

Chiamando  $\phi(t)$  la fase del coseno:

$$FM(t) = \cos(\phi(t)) \quad \text{con} \quad \phi(t) = (\omega_p t + \phi_p) + A_{FM} \int_0^t \cos(\omega_M \tau + \phi_M) d\tau$$

Eseguendo inoltre l'integrale abbiamo:

$$\phi(t) = (\omega_p t + \phi_p) + \frac{A_{FM}}{\omega_M} (\sin(\omega_M t + \phi_M) - \sin(\phi_M))$$

### 4.3 Equivalenza PM - FM e passaggio dall'una all'altra

Confrontando le fasi della PM e della FM si vede abbastanza semplicemente che le due sono equivalenti a patto di porre alcune uguaglianze.

$$\phi_{PM}(t) = \omega_p t + \phi_P^{PM} + A_{PM} \cdot \cos(\omega_M \cdot t + \phi_M^{PM}) \quad 8$$

$$\phi_{FM}(t) = (\omega_p t + \phi_P^{FM}) + \frac{A_{FM}}{\omega_M} (\sin(\omega_M t + \phi_M^{FM}) - \sin(\phi_M^{FM})) \quad 9$$

Riscrivendo la 9:

$$\phi_{FM}(t) = (\omega_p t + \phi_P^{FM} - \cos(\phi_M^{FM} - \frac{\pi}{2})) + \frac{A_{FM}}{\omega_M} (\cos(\omega_M t + (\phi_M^{FM} - \frac{\pi}{2}))) \quad 10$$

Si vede dunque facilmente che la 8 e la 10 diventano identiche se si pone:

$$\phi_P^{PM} = \phi_P^{FM} - \cos(\phi_M^{FM} - \frac{\pi}{2}); \quad \phi_M^{PM} = \phi_M^{FM} - \pi/2; \quad A_{PM} = \frac{A_{FM}}{\omega_M} \quad 11$$

**Una PM nella quale i parametri siano stati definiti secondo la 11 è equivalente alla relativa FM, nel senso che produce la stessa forma d'onda. PM ed FM esprimono dunque lo stesso insieme di forme d'onda.**

Dalle 11 è facile intuire che la PM è formalmente più semplice e più facilmente gestibile, in quanto **mantiene separati i parametri relativi alla modulante e alla portante**. Questa circostanza sarà ancora più evidente nel seguito, e fornisce una ulteriore giustificazione dell'adozione della PM come paradigma per lo sviluppo del formalismo. L'implementazione diretta della PM non presenta inoltre nessun problema nei sistemi correnti per la musica elettronica<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Una eccezione sembrerebbe essere rappresentata da *PureData*, nel quale l'oscillatore sinusoidale *osc~* non possiede un ingresso in fase (ma solo un ingresso per il ripristino della fase iniziale). Questo è senza dubbio un difetto dell'implementazione di PD, che può essere però

Un caso particolare è quello in cui  $\phi_M=0$ . In tal caso le 11 prendono una forma più semplice.

$$\phi_P^{PM} = \phi_P^{FM}; \quad \phi_M^{PM} = \frac{-\pi}{2}; \quad A_{PM} = \frac{A_{FM}}{\omega_M} \quad 12$$

Che hanno come conseguenza:

$$PM_{FM}(t) = \cos(\omega_P t + \phi_P^{FM} + \frac{A_{FM}}{\omega_M} \sin(\omega_M t)) \Leftrightarrow \phi_M^{FM} = 0$$

In questo caso, **la modulazione di frequenza è equivalente ad una modulazione di fase eseguita da una senoide e con ampiezza di modulazione diversa per la pulsazione della modulante.**

## 5 Spettro della PM, e sua derivazione

Per valutare gli effetti percettivi della PM è necessario conoscere lo spettro della forma d'onda 2. Qui nel seguito se ne ricaverà una espressione analitica in forma chiusa. A differenza però di quanto accade generalmente nei testi di musica elettronica, questa espressione non si limiterà ad esprimere le ampiezze e le frequenze delle parziali, ma anche le rispettive fasi iniziali le quali, come si vedrà, sono importanti oltre che per valutare, ad esempio, le interferenze tra PM diverse, o tra PM ed altri segnali, ma anche per un uso più avanzato della PM stessa.

### 5.1 Derivazione della formula per la composizione spettrale della PM

Per rendere più semplici i passaggi consideriamo una modulazione di fase di un oscillatore complesso. Otterremo poi la modulazione di fase reale prendendone la parte reale.

$$PM_c(t) = e^{\varphi(t)} = e^{i(\omega_P t + \phi_P + A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M))} \quad 13$$

La fase può essere riscritta nel seguente modo:

$$\varphi(t) = \varphi_P(t) + \varphi_M(t); \quad \varphi_P(t) = (\omega_P t + \phi_P) \quad \varphi_M(t) = (\omega_M t + \phi_M)$$

La 13 può quindi essere riscritta:

$$PM_c(t) = e^{\varphi_P(t)} e^{\varphi_M(t)} = e^{i(\omega_P t + \phi_P)} e^{i(A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M))} \quad 14$$

Il primo dei due esponenziali è qui un fasore alla frequenza e fase della portante, mentre il secondo è una **modulazione di fase con frequenza (e fase) della portante a zero**. Nel seguito questo tipo di modulazione verrà detto, per brevità, **modulazione a portante zero**.

Si potrebbe essere tentati di leggere del prodotto dei due esponenziali espresso nella 14 uno spostamento di frequenza, ma mentre il primo dei due esponenziali (il fasore) è un segnale analitico, il secondo non lo è, come vedremo meglio nel seguito, e pertanto quel prodotto indica qualcosa di diverso e di più complicato di un semplice spostamento di frequenza.

---

facilmente avviato utilizzando oscillatori tabellari, nei quali l'ingresso di fase è per loro natura disponibile.

Il secondo termine del prodotto, la modulazione a portante zero, è un'espressione notevole:

$$PM_{c0}(t) = e^{i A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M)} \quad 15$$

Essa è infatti una delle *espressioni generatrici* delle funzioni di Bessel di prima specie<sup>2</sup>, qui indicate come di consueto con la lettera J, dove z rappresenta un numero complesso:

$$e^{iz \cos(\varphi)} = J(0, z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, z) \cos(k \varphi)) \quad 16$$

Le funzioni di Bessel di prima specie, come vedremo meglio nel seguito, sono funzioni di due argomenti (uno reale e uno complesso), con valori reali, e dunque diventa evidente che la 16 non rappresenta un segnale analitico: essa è infatti la somma di segnali reali e segnali immaginari. Il termine  $J(0, z)$  è infatti reale, così come tutti i termini della sommatoria con  $k$  pari ( $i^k = \pm 1$  se  $k$  è pari). I medesimi termini con  $k$  dispari sono invece immaginari ( $i^k = \pm i$  se  $k$  è dispari).

La 16 fornisce l'espressione della PM complessa a portante zero, con la semplice sostituzione  $z = A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M)$  :

$$PM_{c0}(t) = e^{i A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M)} = J(0, A_{PM}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, A_{PM}) \cos(k(\omega_M t + \phi_M))) \quad 17$$

Consideriamo ora la PM reale, prendendo la parte reale della 17:

$$PM(t) = \Re (PM_c(t)) = \cos(\omega_p t + \phi_p + A_{PM} \cos(\omega_M t + \phi_M))$$

$$PM(t) = \Re (e^{i(\omega_p t + \phi_p)} J(0, A_{PM}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{i(\omega_p t + \phi_p)} i^k J(k, A_{PM}) \cos(k(\omega_M t + \phi_M)))$$

$$PM(t) = J(0, A_{PM}) \cos(\omega_p t + \phi_p) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J(k, A_{PM}) \cos(\omega_p t + \phi_p + \frac{\pi}{2} k) \cos(k(\omega_M t + \phi_M)) \quad 18$$

Dove si è tenuto conto che  $i^k = 1$  per  $k$  pari e multiplo di 4;  $i^k = -1$  per  $k$  pari e non multiplo di 4;  $i^k = -i$  per  $k = 1, 5, 9 \dots$  e  $i^k = i$  per  $k = 3, 7, 11 \dots$

Nella 18 il termine dentro la sommatoria è una modulazione a prodotto la quale, come noto, dà luogo a due termini in somma, uno con pulsazione pari alla somma delle pulsazioni, e l'altro con pulsazione pari alla differenza tra le pulsazioni. Più esattamente:

$$2 \cdot \cos(\omega_p t + \phi_p + \frac{\pi}{2} k) \cos(k(\omega_M t + \phi_M)) = \cos((\omega_p + \omega_M k)t + \phi_p + k(\frac{\pi}{2} + \phi_M)) + \dots$$

$$+ \cos((\omega_p - \omega_M k)t + \phi_p + k(\frac{\pi}{2} - \phi_M))$$

La 18 può quindi essere scritta:

---

2 I.S.GradshTEYN, I.W.RYZHIK, Table of series and products, Academic Press, 1965, 8.511 4 p. 973, da: Magnus W., Oberhettinger F., *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Springer Verlag, Berlin, 1948.

$$PM(t) = J(0, A_{PM}) \cos(\omega_p t + \phi_p) + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} J(k, A_{PM}) \left[ \cos((\omega_p + k \omega_M)t + \phi_p + k(\frac{\pi}{2} + \phi_M)) + \cos((\omega_p - k \omega_M)t + \phi_p + k(\frac{\pi}{2} - \phi_M)) \right] \quad 19$$

Che ci porge il classico risultato, con in più alcuni dettagli, come vedremo indispensabili, sulle fasi iniziali:

**La modulazione di fase di una portante ha come spettro la portante medesima e coppie di righe simmetriche rispetto alla frequenza della portante, spaziate della pulsazione della modulante.** L'indice  $k$  (che individua una coppia di parziali) prende il nome di *ordine*. Possiamo considerare la portante come l'ordine 0.

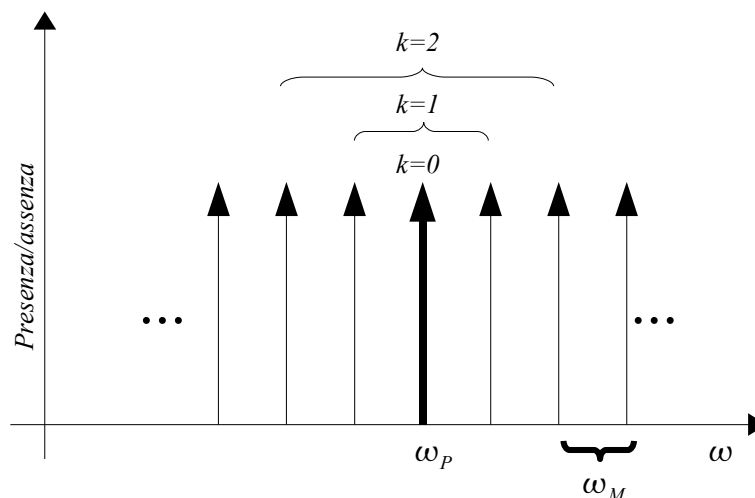


Fig. 3 - Spettro (qualitativo) della PM

La ampiezza di modulazione  $A_{PM}$  è equivalente al valore della variabile da inserire nella funzione di Bessel. Quest'ultimo prende il nome di *indice di modulazione*  $I_M$ .

**Le ampiezze degli ordini sono definite dalle funzioni di Bessel di prima specie  $J(k, I_M)$ , dove al primo argomento compare l'ordine, e al secondo l'indice di modulazione.**

## 6 Funzioni di Bessel

Le funzioni di Bessel sono funzioni oscillanti e decrescenti con l'indice di modulazione. Esse possono essere calcolate sfruttando le loro numerose proprietà, ma l'argomento del loro calcolo numerico è lasciato ai testi specializzati. Qualunque sistema per la matematica (Scilab, Maxima), in ogni caso, è in grado di calcolare le funzioni di Bessel di prima specie, che compaiono anche nelle librerie matematiche per il C-language.

Daremo qui un breve sguardo qualitativo e quantitativo alle funzioni di Bessel, per fornire degli elementi di governo della PM e della FM.

Anzitutto una considerazione di carattere elementare:

$$J(0,0)=1; \quad J(k,0)=0, \quad k \neq 0$$

20

Questo significa che ad indice di modulazione 0, la portante ha ampiezza 1, mentre gli altri ordini hanno ampiezza 0. Si tratta di un risultato ovvio, tenendo conto che una modulazione ad indice 0 non è di fatto una modulazione, e quindi ci si aspetta di trovare in uscita nient'altro che la portante.

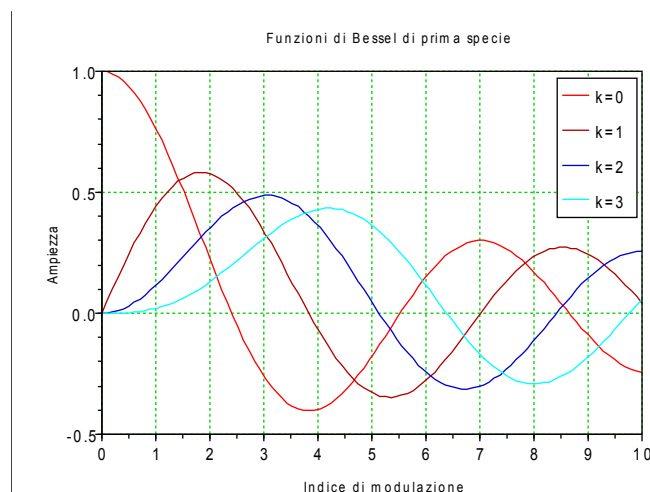


Fig. 4 - Funzioni di Bessel di prima specie per i primi 4 ordini

Com'è facile intuire dalla fig. 4, al variare dell'indice di modulazione le ampiezze dei diversi ordini oscillano in modo indipendente l'uno dall'altro. L'ampiezza di questa oscillazione diminuisce all'aumentare di  $I_M$ , tendendo a zero per  $I_M \rightarrow \infty$ . L'andamento generale delle funzioni di Bessel è meglio visibile nella figura seguente, dove il campo di variazione dell'indice di modulazione e degli ordini è più ampio.

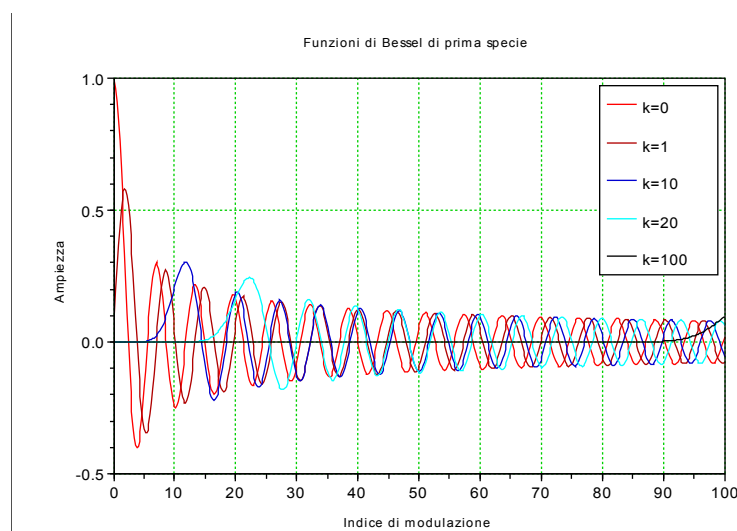


Fig. 5 - Funzioni di Bessel di prima specie fino all'ordine 100 e  $I_M = 100$

In quest'ultima figura è evidente un fenomeno importante: man mano che

l'ordine cresce, si allunga la zona iniziale nella quale la funzione di Bessel ha ampiezza trascurabile, e si sposta verso destra il ginocchio al quale la funzione si stacca dall'asse delle ascisse.

Questo significa che *ordini grandi necessitano di indici di modulazione altrettanto grandi perché diventino percepibili*, e quindi che *l'indice di modulazione governa in modo sostanziale la larghezza di banda della PM*.

## 7 Approssimazioni delle funzioni di Bessel per piccoli e grandi indici di modulazione

Delle funzioni di Bessel di 1<sup>a</sup> specie sono note approssimazioni per piccoli  $I_M$ :

$$J(k, I_M) \approx \frac{1}{k!} \frac{I_M^k}{2}, \quad I_M \ll \sqrt{(k+1)}$$

Il limite indicato è molto a sinistra del ginocchio, e quindi questa formula è di scarsa utilità nelle applicazioni musicali, dato che fornisce una approssimazione del valore delle ampiezze delle parziali nella zona in cui non sono percepibili.

L'approssimazione per grandi  $I_M$  fornisce invece un'indicazione utile a capire il comportamento oscillante nella coda a destra:

$$J(k, I_M) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi I_M}} \cdot \cos\left(I_M - \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right), \quad I_M \gg k^2 - \frac{1}{4}$$

Le funzioni di Bessel di prima specie tendono dunque ad un coseno di ampiezza decrescente come  $\sqrt{1/I_M}$ , la quale non dipende dunque più da  $k$ . *L'ampiezza è quindi tendenzialmente la stessa per tutti gli ordini*. Le fasi dipendono invece da  $k$  in modo periodico: esse tendono a coincidere ogni 4 ordini. Infatti:

$$\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \left(k_2 - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \left(k_1 - \frac{1}{2}\right)\right) = n \cdot 2\pi \Leftrightarrow k_2 - k_1 = 4 \cdot n$$

Le Bessel tendono quindi a destra a coincidere ogni 4 ordini.

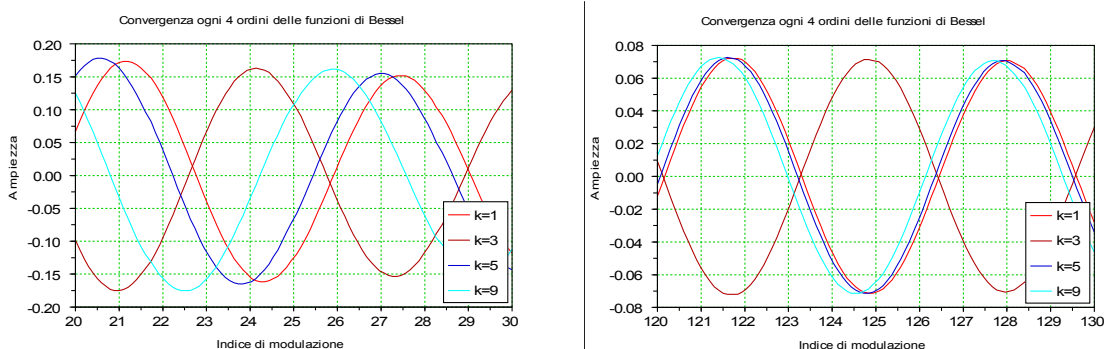


Fig. 6 - Convergenze e non convergenze delle funzioni di Bessel per  $20 < I_M < 30$  e per  $120 < I_M < 130$  e  $k = 1, 3, 5, 9$ . La convergenza avviene ogni 4 ordini. Si noti la diversa scala nelle ordinate.

## 8 Parametri nelle diverse unità di misura

### 8.1 Indice di Modulazione

Da quanto detto alla pag. 8, Cap. 5.1, l'ampiezza della modulante  $A_{PM}$  della modulazione di fase è pari all'indice di modulazione (che è il valore che deve essere utilizzato nelle funzioni di Bessel). Vale la pena di precisare che questa formulazione è valida per i sistemi matematici, nei quali gli angoli si misurano in radianti.

Osservando la 11 a pag. 5, abbiamo dunque, sempre per i sistemi matematici:

$$I_M = A_{PM}^{rad}; \quad I_M = \frac{A_{FM}^{rad}}{\omega_M} \quad 21$$

Nei sistemi tecnici (frequenze in Hz, angoli in giri) abbiamo invece:

$$I_M = A_{PM}^{Hz} \cdot 2\pi; \quad I_M = \frac{A_{FM}^{Hz}}{f_M} \quad 22$$

La  $A_{FM}^{Hz}$  nei sistemi tecnici (quindi riferita ad una fase misurata in giri, non in radianti) prende talvolta il nome di *deviazione di cresta*, ed è spesso indicata con la lettera  $\delta$ .

*Tabella riassuntiva delle formule che legano Ampiezza di modulazione e Indice di modulazione nelle diverse circostanze.*

	PM	FM
Radianti	$I_M = A_{PM} \Rightarrow A_{PM} = I_M$	$I_M = \frac{A_{FM}}{\omega_{modulante}} \Rightarrow A_{FM} = I_M \cdot \omega_{modulante}$
Giri	$I_M = 2\pi A_{PM_g} \Rightarrow A_{PM_g} = \frac{I_M}{2\pi}$	$I_M = \frac{A_{FM}}{\nu_{modulante}} \Rightarrow A_{FM} = I_M \cdot \nu_{modulante}$

**Nota:**

- scilab, matlab, C-language, Fortran definiscono gli angoli in radianti (pulsazioni in rad/sec).
- Max-MSP, PureData, definiscono gli angoli in giri (frequenze in giri/sec = Hz).

### 8.2 Larghezza di banda

Relativamente alla larghezza di banda, nella pratica della musica elettronica si adotta una espressione empirica semplificata della dipendenza del numero di ordini che hanno ampiezza significativa dall'indice di modulazione:

$$N_{max} \approx I_M \quad 23$$

La emilarghezza di banda assoluta, con questa approssimazione, è data dunque da:

$$\frac{BW_{rad}}{2} = N_{max} \cdot \omega_M \approx I_M \cdot \omega_M = A_{PM}^{rad} \cdot \omega_M = A_{FM}^{rad}$$

$$\frac{BW_{Hz}}{2} = N_{max} \cdot f_M \approx I_M \cdot f_M = A_{PM}^{Hz} \cdot 2\pi f_M = A_{FM}^{Hz}$$

Una regola sempre empirica ma che fornisce un'approssimazione un po' migliore (per  $I_M > 10$ ) è la seguente:

$$N_{max} \approx 1.022 \cdot I_M + 4.27 \quad 24$$

La emilarghezza di banda assoluta con quest'altra approssimazione è data dunque da:

$$\frac{BW_{rad}}{2} = N_{max} \cdot \omega_M = (1.022 \cdot I_M + 4.27) \cdot \omega_M$$

## 9 Utilizzazione musicale: questioni percettive

### 9.1 Suoni armonici e inarmonici

La PM (o la FM), che sono in grado di produrre solo pettini equispaziati, possono essere utilizzate per produrre pettini armonici o inarmonici, in dipendenza del rapporto tra frequenza della portante e quella della modulante.

In particolare ***avremo uno spettro armonico se la frequenza della portante è un multiplo della frequenza della modulante. In questo caso la frequenza della modulante è anche la fondamentale del pettine.***

Avremo invece uno spettro inarmonico (sempre equispaziato, ma “fuori posto”) in caso contrario. ***In questo caso la frequenza della modulante risulta essere comunque il passo del pettine, ma non la fondamentale, poiché un pettine equispaziato “fuori posto” non possiede una fondamentale.***

### 9.2 Larghezze di banda assolute e relative

Le seconde delle 21 e 22 rendono anche chiaro in quali circostanze sia preferibile la PM e in quali altre la FM. Nella PM l'indice di modulazione non dipende dalla frequenza della modulante, e quindi il numero di ordini significativi non dipende (o dipende assai poco) anch'esso dalla frequenza della modulante.

Diverso è il discorso sulla *banda relativa*, che spesso interessa più di quella assoluta. La banda relativa è il rapporto tra larghezza di banda assoluta e frequenza della portante (rappresenta dunque la banda in *intervalli*).

In unità tecniche, adottando l'approssimazione 23, la semibanda relativa è:

$$\frac{BW_{Hz}}{2 \cdot f_P} = N_{max} \cdot \frac{f_M}{f_P} = I_M \cdot \frac{f_M}{f_P} = A_{PM} \cdot \frac{f_M}{f_P} = \frac{A_{FM}}{f_P}$$

La larghezza di banda relativa è dunque proporzionale ad  $A_{PM}$  e al rapporto tra frequenza modulante e portante (dall'*intervallo* tra portante e modulante), mentre non dipende più dalla frequenza modulante nella FM.

Se si vogliono produrre spettri armonici, per variare la fondamentale si deve

variare  $f_M$  (la quale, essendo la fondamentale, stabilisce l'intonazione), ma occorre variare proporzionalmente anche la  $f_P$  perché lo spettro continui ad essere armonico. Il rapporto tra frequenza portante e frequenza modulante deve restare un intero, presumibilmente invariato, al variare dell'intonazione. In queste circostanze la PM garantisce costanza di larghezza di banda relativa, mantenendo costante l'ampiezza di modulazione, mentre la FM richiede una variazione proporzionale alla frequenza portante della ampiezza di modulazione, altrimenti si avrebbe un restringimento della larghezza di banda relativa quando si sale di intonazione, e un allargamento quando si scende.

Questo secondo comportamento può anche risultare preferibile, perché è più vicino a ciò che accade nell'ascolto degli strumenti acustici, stante la limitazione della banda udibile ai 20 kHz<sup>3</sup>.

Queste considerazioni hanno un particolare significato perché la variazione dell'indice di modulazione comporta una variazione dei rapporti di ampiezza tra gli ordini, e dunque un cambiamento degli aspetti spettrali del timbro. Se nel cambiare intonazione si modifica l'indice di modulazione, è opportuno ricordare che questo si accompagnerà anche ad un cambiamento di timbro che, sia nella PM, sia nella FM, è “rigido” e non modulabile, una volta fissato l'indice di modulazione.

Se non si vuole modificare il rapporto tra le ampiezze delle parziali, non si deve modificare l'indice di modulazione, circostanza che ha delle implicazioni, diverse tra PM e FM, sulla larghezza di banda.

### 9.3 Ribaltamento delle frequenze negative

Come con tutte le tecniche di modulazione, occorre sempre ricordare il fenomeno del ribaltamento attorno allo zero. Se il numero di ordini è sufficientemente elevato, alcune parziali della banda sinistra si troveranno nella zona delle frequenze negative.

Le frequenze negative sono sempre esprimibili in termini di frequenze positive, e quindi si troveranno di fatto “ribaltate” (con opportuno cambiamento di fase) dal lato positivo, interferendo con le altre parziali.

Ricordiamo qui, dalla relazione  $\cos(-a) = \cos(a)$ , che:

$$\cos(-\omega t + \phi) = \cos(\omega t - \phi) \quad 25$$

***Qualsiasi frequenza negativa è equivalente alla medesima frequenza presa con il segno positivo e con la fase iniziale (cosinusoidale) cambiata di segno.***

Nella PM la condizione per avere un ribaltamento attorno allo zero è la seguente:

---

3 Vale la pena di fare notare che nell'ascolto degli strumenti acustici, generalmente, è la banda assoluta a decrescere salendo di intonazione (e viceversa scendendo), a causa della limitazione della banda percepibile. Questa caratteristica non è garantita “naturalmente” né dalla FM né dalla PM, nel senso che per ottenere un comportamento del genere si deve modificare l'indice di modulazione, con inevitabile modificazione timbrica.

$$f_P - N_{max} \cdot f_M \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_{max} \geq \frac{f_P}{f_M}$$

Se lo spettro generato era armonico, le frequenze negative ribaltate (che risalgono l'asse delle frequenze al crescere dell'ordine  $k$ ) si troveranno a coincidere esattamente con le righe discendenti, interferendo con esse.

### 9.3.1 Interferenza tra parziali ribaltate e non ribaltate in caso di coincidenza di frequenza

Ci si può domandare che genere di interferenza si crei e, in particolare, se questa possa - in determinate condizioni - arrivare alla cancellazione delle due parziali coincidenti.

Perché questo avvenga occorrono due condizioni: che l'ampiezza delle due parziali, chiamiamole di ordine  $k_1$  e  $k_2$ , sia la medesima, e che la fase sia opposta. Quanto all'ampiezza:

$$J(k_1, I_M) = J(k_2, I_M) \tag{26}$$

Cosa questa non impossibile, data la natura oscillante delle funzioni di Bessel, per determinati valori di  $k_1$ ,  $k_2$  e  $I_M$ . Non c'è però modo di risolvere l'equazione 26 in modo esplicito, in forma chiusa, ma solo numericamente, e quindi caso per caso.

Quanto alle fasi, ricordiamo qui, dalla 19 a pag. 8, l'espressione per la parziale di ordine  $k$  della banda sinistra:

$$P_s(k, t) = \cos((\omega_P - k\omega_M)t + \phi_P + k(\frac{\pi}{2} - \phi_M))$$

Questa, ribaltata attorno allo zero (quando  $\omega_P - k\omega_M < 0$ ), diventa<sup>4</sup>:

$$P_r(k, t) = \overline{P_s(k, t)} = \cos((k\omega_M - \omega_P)t - \phi_P - k(\frac{\pi}{2} - \phi_M))$$

La ribaltata  $k_r$  interferisce con la parziale avente la medesima frequenza positiva  $\omega_c$  di indice  $k_p$  dando luogo al segnale:

$$P_i(\omega_c, \phi_P, k_r, k_p, t) = \cos(\omega_c t + \phi_P + k_p(\phi_M + \frac{\pi}{2})) + \cos(\omega_c t - \phi_P - k_r(\phi_M + \frac{\pi}{2}))$$

Questa può essere identicamente nulla ( $\forall t$ ), se e solo se:

$$\cos(\omega_c t + \phi_P + k_p(\phi_M + \frac{\pi}{2})) = -\cos(\omega_c t - \phi_P - k_r(\phi_M + \frac{\pi}{2}))$$

Le fasi devono dunque differire di  $\pi$ :

$$\phi_P + k_p(\phi_M + \pi/2) = -\phi_P - k_r(\phi_M + \pi/2) + \pi$$

e dunque:

$$2\phi_P + (k_p + k_r)(\phi_M + \pi/2) = \pi$$

che fornisce la soluzione in  $\phi_M$ :

4 Indicando il ribaltamento attorno allo zero con il soprasegno  $\overline{\quad}$ . V. [1]

$$\phi_M = \frac{\pi - 2\phi_P}{(k_r + k_p)} - \frac{\pi}{2} \quad 27$$

oppure in  $\phi_P$ :

$$\phi_P = \frac{1}{4}(2\pi(2n+1) - 2\phi_M(k_r - k_p n) - \pi(k_r - k_p)) \quad 28$$

L'annullamento di una parziale per sovrapposizione di spettro diretto e ribaltato attorno allo zero è dunque teoricamente possibile soddisfacendo la 27 o la 28, e assieme la 26. Va da sé che non si tratta di condizioni facilmente esaudibili.

Se lo spettro non è armonico, le frequenze ribaltate non potranno mai coincidere con quelle positive, e i due pettini (dritto e ribaltato) potranno eventualmente interferire, ma solo sul piano percettivo (ad esempio, creando battimenti e rugosità).

#### 9.4 Fold-over

Nei sistemi numerici a tempo campionato, oltre al ribaltamento attorno allo zero, esiste anche il ribaltamento attorno alla frequenza di Nyquist. Quindi esiste la possibilità che una parte dello spettro generato a destra, ascendente con l'indice  $k$ , generi uno spettro discendente. In generale lo spettro ribaltato non sarà armonico, anche se generato da uno spettro armonico, salvo per casi particolari di rapporto tra frequenze portanti, modulanti e frequenza di Nyquist.

In generale, la condizione perché si generi foldover, adottando l'approssimazione 24, è la seguente:

$$I_M \geq I_M^{foldover} = \frac{\omega_{nyquist} - \omega_P - 4.27 \omega_M}{1.022 \omega_M}$$

Adottando l'approssimazione  $N_{max} = I_M$ :

$$I_M \geq I_M^{foldover} = \frac{\omega_{nyquist} - \omega_P}{\omega_M} = \frac{f_{nyquist} - f_P}{f_M}$$

Le condizioni per l'armonicità dello spettro discendente, dove  $k_{foldover}$  è l'indice di ordine al di là del quale si genera foldover sono:

$$k_{foldover} \omega_M + \omega_P = \omega_{nyquist}$$

E dunque:

$$\frac{\omega_{nyquist} - \omega_P}{\omega_M} = \frac{f_{nyquist} - f_P}{f_M} = k_{foldover}$$

deve risultare un numero intero.

In altre parole: **perché lo spettro discendente sia armonico (indipendentemente da quello ascendente) la differenza tra la frequenza di Nyquist e quella della portante deve essere un multiplo della frequenza modulante.**

Se lo spettro generato da PM o FM era armonico, allora:

$$f_P = n \cdot f_M$$

e dunque:

$$\frac{f_{nyquist} - n \cdot f_M}{f_M} = k_{foldover} \Leftrightarrow \frac{f_{nyquist}}{f_M} - n = k_{foldover}$$

che deve risultare un intero. Dunque questa è una condizione tra frequenza modulante e Nyquist: **se si genera uno spettro armonico, sarà armonico anche lo spettro ribaltato dal foldover se e solo se anche la frequenza di Nyquist è un multiplo della frequenza della modulante.**

**La possibilità di ottenere spettri ascendenti che siano armonici assieme a quelli discendenti ottenuti da foldover è dunque limitata alle sole fondamentali che siano sottomultiple della frequenza di Nyquist, ovvero che abbiano tale frequenza come loro armonica.**

E' facile, con pochi semplici calcoli, verificare che questo limita ad un numero veramente ridotto di intonazioni per usi pratici.

## 10 PM con frequenza zero di portante

La modulazione di fase con portante a frequenza zero produce solo pettini armonici, ma è un caso particolarmente interessante, oltre che per alcune possibilità che fornisce in sé e per sé, in quanto è la base per ulteriori sviluppi che saranno enunciati nel seguito.

La PM a portante a frequenza zero ha la seguente espressione, ricavata dalla 18 a pag. 7:

$$PM_0(t) = J(0, A_{PM}) \cos(\phi_P) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J(k, A_{PM}) \cos\left(\phi_P + \frac{\pi}{2} k\right) \cos(k(\omega_M t + \phi_M)) \quad 29$$

Come si vede, essa è uno spettro di righe armonico di fondamentale  $\omega_M$ , ivi compreso un valore in continua di ampiezza  $J(0, A_{PM}) \cos(\phi_P)$ .

L'ampiezza delle singole armoniche è qui governata, oltre che dalla funzione di Bessel, da  $\cos(\phi_P + \frac{\pi}{2} k)$ , che chiameremo **fattore di ampiezza**.

Il fattore di ampiezza si annulla per determinati valori della fase della portante  $\phi_P$  e determinati indici  $k$ :

$$\cos(\phi_P + \frac{\pi}{2} k) = 0 \Leftrightarrow \phi_P + \frac{\pi}{2} k = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad k = (2n-1) - 2 \frac{\phi_P}{\pi} \quad 30$$

Questo impone un vincolo sulla fase  $\phi_P$ , dato che  $k$  deve essere intero:  $\phi_P$  deve essere un multiplo di  $\pi/2$ . Sia  $\phi_P = N \pi/2$ , con  $N=0,1,2,3$ :

$k = (2n-1) - N$  e abbiamo le 4 possibilità:

$$\begin{aligned} k = 2n-1, & \quad N=0; & k = 2n-1-1=2n, & \quad N=1 \\ k = 2n-1-2=2n-3, & \quad N=2; & k = 2n-1-3=2n-4, & \quad N=3 \end{aligned}$$

In altre parole, **per fase iniziale della portante multipla di  $\pi/2$ , sono nulli gli ordini (ovvero, in questo caso, le armoniche):**

$\phi_p=0$  : **dispari** (la continua è presente, con segno positivo)

$\phi_p=\pi/2$  : **pari** (la continua è nulla)

$\phi_p=\pi$  : **dispari** (la continua è presente con segno negativo)

$\phi_p=3/2\pi$  : **pari** (la continua è nulla)

Il fattore di ampiezza vale invece esattamente  $\pm 1$ , per determinati valori della fase della portante  $\phi_p$  e determinati indici  $k$ :

$$\cos(\phi_p + \frac{\pi}{2}k) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \phi_p + \frac{\pi}{2}k = 2n\frac{\pi}{2} \quad k = 2n - \frac{2\phi_p}{\pi}$$

Anche qui la fase  $\phi_p$  deve essere un multiplo di  $\pi/2$ . Con il medesimo significato per  $N$ :

$k = 2n - N$ , con le quattro possibilità:

$k = 2n$ ,  $N = 0$ ;  $k = 2n - 1$ ,  $N = 1$

$k = 2n - 2$ ,  $N = 2$ ;  $k = 2n - 3$ ,  $N = 3$

**Con fase iniziale della portante multipla di  $2\pi$ , hanno dunque modulo 1 (valore massimo) i fattori d'ampiezza degli ordini (armoniche):**

$\phi_p=0$  : **pari**

$\phi_p=\pi/2$  : **dispari**

$\phi_p=\pi$  : **pari**

$\phi_p=3/2\pi$  : **dispari**

Mediante la fase  $\phi_p$  è in generale possibile controllare il rapporto tra i fattori di ampiezza delle armoniche pari e di quelle dispari. Infatti, chiamato  $\rho_{PD}$  questo rapporto in modulo:

$$\rho_{PD} = \left| \frac{\cos(\phi_p + 2n\frac{\pi}{2})}{\cos(\phi_p + (2n-1)\frac{\pi}{2})} \right| = |\cot(\phi_p)|$$

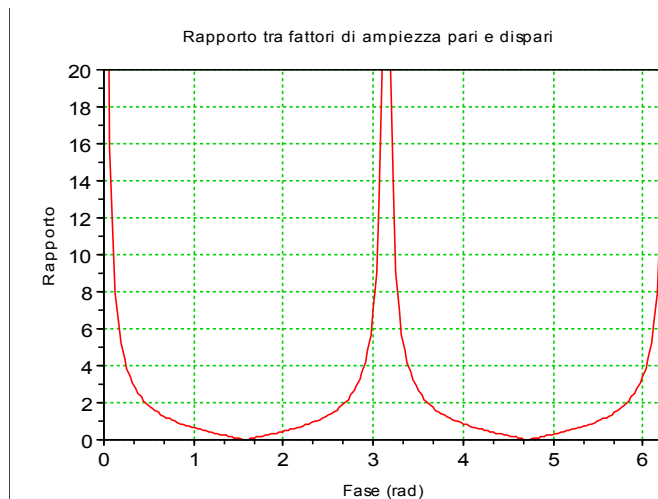


Fig. 7 - Andamento di  $\rho_{PD}$  in funzione di  $\phi_P$

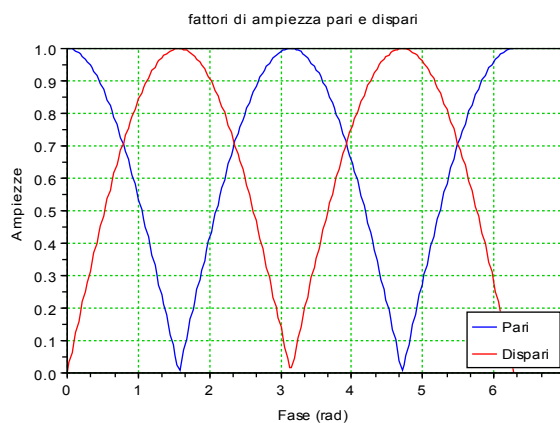


Fig. 8 - Andamento dei fattori di ampiezza per ordini pari e dispari.

***Il rapporto tra fattori di ampiezza delle armoniche pari e quelle dispari è la cotangente della fase iniziale della portante.***

Un caso notevole è quello in cui i fattori di fase di pari e dispari sono uguali, e quindi la  $PM_0$  si comporta, da questo punto di vista, come una  $PM$  qualunque. Questo significa  $\rho_{PD}=1$ , e dunque:

$$\phi_P = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \phi_P = \pm \frac{3}{4}\pi \quad 31$$

Ulteriori conclusioni che discendono dalle considerazioni fatte sono le seguenti:

1. ***Lo spettro della modulazione di fase a portanze zero è armonico.***
2. ***Se non vi sono soppressioni di ordini pari o dispari, lo spettro ha come fondamentale la modulante.***
3. ***Se si sopprimono gli ordini pari, lo spettro sarà armonico con fondamentale pari alla modulante, ma privo di armoniche pari.***
4. ***Se si sopprimono gli ordini dispari, lo spettro sarà armonico ma con***

*fondamentale pari al doppio (ottava) della frequenza della modulante.*

## 11 SSPM - Modulazione di fase a singola banda laterale

La modulazione di fase con portante zero permette di concepire la modulazione a singola banda laterale (*Single Sideband Phase Modulation*).

Applicando infatti uno spostamento di frequenza (*frequency shift*) di entità  $\omega_p$  ad una  $PM_0$  si può ottenere, se ci si mette nelle condizioni indicate dalla 31, esattamente lo spettro di una PM con portante  $\omega_p$ , ma con la sola banda laterale destra. Applicando uno spostamento di frequenza  $-\omega_p$  si otterrà una PM con la sola banda laterale sinistra.

Questo modo di procedere non permette solo di scegliere quale banda laterale sopprimere, ma anche, sulle linee di quanto indicato nel par. 10, di modulare il peso relativo degli ordini pari e dispari, con effetti timbrici assai diversi da quelli ottenibili con la PM tradizionale.

## 12 Modulazione di fase a due operatori

Per Modulazione di Fase a due operatori ( $PM_2$ ) si intende una modulazione di una unica portante eseguita dalla combinazione lineare di due modulanti:

$$PM_2(t) = \cos(\omega_p t + \phi_p + (A_{PM1} \cos(\omega_{M1} t + \phi_{M1})) + (\cos(\omega_{M2} t + \phi_{M2}))) \quad 32$$

Nel linguaggio delle *patch* appare come segue.

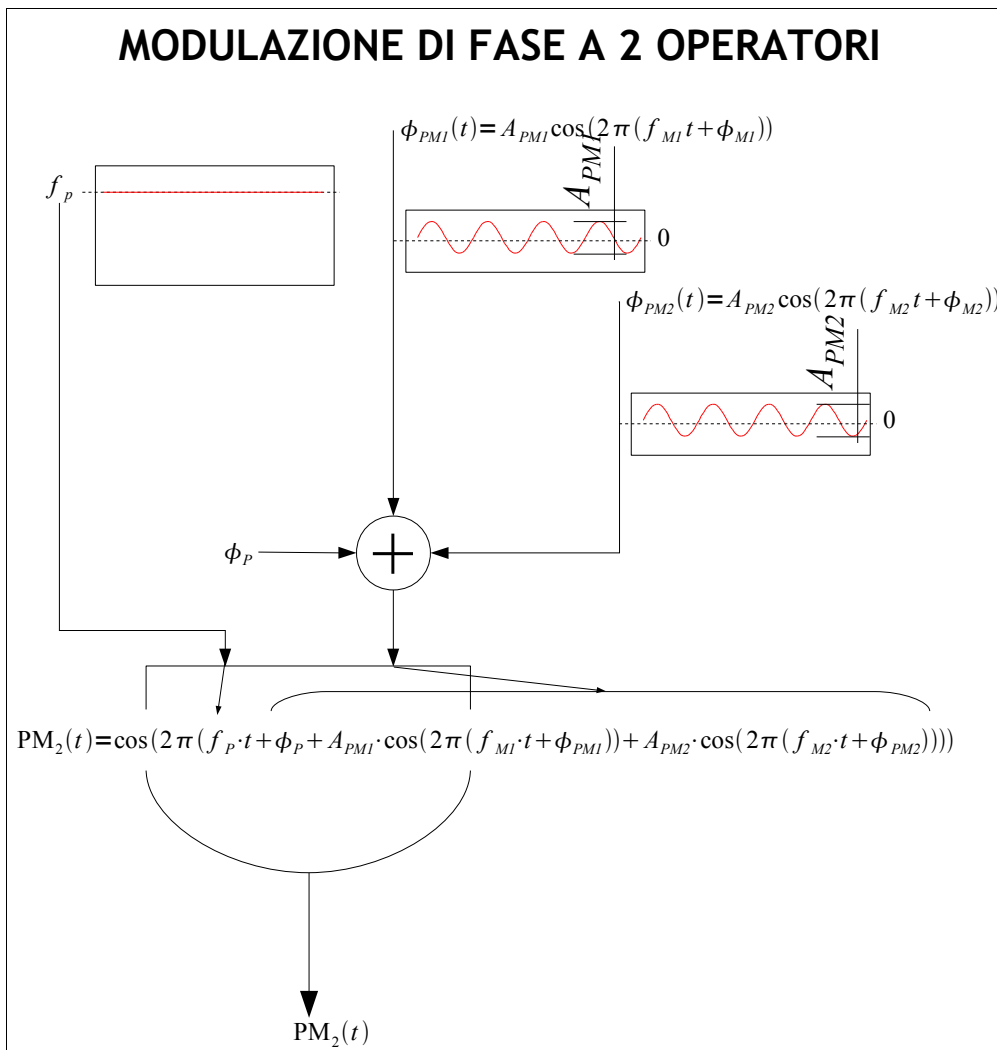


Fig. 9 - Patch per modulazione di fase a due operatori

Per ricavare le caratteristiche spettrali della PM a due operatori, consideriamola come la parte reale di una modulazione di fase di un segnale complesso. Per non appesantire i calcoli, considereremo tutte le fasi iniziali a 0:

$$PM2(\omega_p, \omega_{M1}, \omega_{M2}, A_{PM1}, A_{PM2}, t) = \Re(e^{i(\omega_p t + A_{PM1} \cos(\omega_{M1} t) + A_{PM2} \cos(\omega_{M2} t))}) \quad 33$$

Ora è immediato scrivere:

$$e^{i(\omega_p t + A_{PM1} \cos(\omega_{M1} t) + A_{PM2} \cos(\omega_{M2} t))} = e^{i\omega_p t} e^{iA_{PM1} \cos(\omega_{M1} t)} e^{iA_{PM2} \cos(\omega_{M2} t)}$$

Sulla base della 16, che riportiamo qui per comodità:

$$e^{iz \cos(\varphi)} = J(0, z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, z) \cos(k \varphi))$$

possiamo scrivere:

$$e^{i A_{PM2} \cos(\omega_{M2} t)} e^{i A_{PM1} \cos(\omega_{M1} t)} = (J(0, A_{PM1}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, A_{PM1}) \cos(k \omega_{M1} t))) \cdot \dots$$

$$(J(0, A_{PM2}) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, A_{PM2}) \cos(k \omega_{M2} t)))$$
34

$$e^{i A_{PM2} \cos(\omega_{M2} t)} e^{i A_{PM1} \cos(\omega_{M1} t)} = J(0, A_{PM1}) J(0, A_{PM2}) + \dots$$

$$+ 2 J(0, A_{PM1}) \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, A_{PM2}) \cos(k \omega_{M2} t)) + \dots$$

$$+ 2 J(0, A_{PM2}) \sum_{k=1}^{\infty} (i^k J(k, A_{PM1}) \cos(k \omega_{M1} t)) + \dots$$

$$+ 4 \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} (i^{k1} J(k1, A_{PM1}) \cos(k1 \omega_{M1} t)) (i^{k2} J(k2, A_{PM2}) \cos(k2 \omega_{M2} t))$$
35

Il 4° termine della 35 può essere riscritto come:

$$4 \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} i^{k1+k2} J(k1, A_{PM1}) \cos(k1 \cdot \omega_{M1} t) J(k2, A_{PM2}) \cos(k2 \cdot \omega_{M2} t)$$
36

Ricordando la 33, osserviamo che ciascuno dei termini a destra della 35 deve essere moltiplicato per  $e^{i \omega_p t}$ , e che è necessario prendere del risultato solo la parte reale. Questo equivale (trattandosi di una somma di termini) a moltiplicare termine a termine per  $e^{i \omega_p t}$  e a prendere la parte reale di ciascuno dei termini così ottenuti.

Il primo contributo (termine a destra della riga 1 della 35) è pari a:

$$\Re(e^{i \omega_p t} J(0, A_{PM1}) J(0, A_{PM2})) = J(0, A_{PM1}) J(0, A_{PM2}) \cos(\omega_p t)$$
37

Si tratta nient'altro che della portante, moltiplicata per le due funzioni di Bessel con indice 0.

I termini della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> riga sono simili. Genericamente essi danno luogo ad un termine del tipo:

$$T_{k, \omega_{My}} = 2 \cdot J(0, A_{PMx}) \Re(e^{i \omega_p t} i^k J(k, A_{PMy}) \cos(k \omega_{My} t))$$
38

Ricordiamo che:

$$\cos(k \omega_M t) = \frac{e^{i k \omega_M t} + e^{-i k \omega_M t}}{2}$$

Possiamo riscrivere la 38 in questo modo:

$$T_{k, \omega_{My}} = 2 \cdot J(0, A_{PMx}) \Re(i^k J(k, A_{PMy}) e^{i \omega_p t} \frac{e^{i k \omega_{My} t} + e^{-i k \omega_{My} t}}{2})$$

$$T_{k, \omega_{My}} = J(0, A_{PMx}) J(k, A_{PMy}) \Re(i^k e^{i \omega_p t} (e^{i k \omega_{My} t} + e^{-i k \omega_{My} t}))$$

I termini esponenziali possono essere ricondotti a:

$$\Re(i^k e^{i \omega_p t} (e^{i k \omega_M t} + e^{-i k \omega_M t})) = \Re(i^k e^{i(\omega_p + k \omega_M) t}) + \Re(i^k e^{i(\omega_p - k \omega_M) t})$$
39

---


$$5 \quad \Re(A) = \frac{A + \bar{A}}{2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \cos(a)$$

Qui occorre distinguere due casi:

$$k \text{ pari: } i^k = -1 \quad \Re(i^k e^{ix}) = -\cos(x)$$

$$k \text{ dispari: } i^k = (-1)^{\frac{k+3}{2}} \cdot i \quad \Re(i^k e^{ix}) = -(-1)^{\frac{k+3}{2}} \sin(x)$$

E dunque:

$$T_{k, \omega_{My}} = -J(0, A_{PMx})J(k, A_{PMy})(\cos((\omega_p + k \omega_{My})t) + \cos((\omega_p - k \omega_{My})t)); \text{ per } k \text{ pari.}$$

$$T_{k, \omega_{My}} = -(-1)^{\frac{k+3}{2}} J(0, A_{PMx})J(k, A_{PMy})(\sin((\omega_p + k \omega_{My})t) + \sin((\omega_p - k \omega_{My})t)); \text{ per } k \text{ dispari.}$$

Questi due contributi forniscono dunque **le frequenze ottenute dalla somma e dalla differenza della portante con tutte le armoniche delle modulanti**.

Infine, l'ultima riga della 35, riassunta nella 36. Ricordiamo che anch'essa va moltiplicata per la portante  $e^{i\omega_p t}$  e del risultato deve essere presa la parte reale.

Possiamo riscrivere il contributo della 36 tenendo sempre conto che il coseno può essere espresso come differenza tra esponenziale e complesso coniugato.

$$T_{M1, M2} = \Re \left( 4 \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} i^{k1+k2} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) e^{i\omega_p t} \cos(k1 \cdot \omega_{M1} t) \cos(k2 \cdot \omega_{M2} t) \right)$$

$$T_{M1, M2} = \Re \left( 4 \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} i^{k1+k2} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) e^{i\omega_p t} \frac{e^{ik1 \cdot \omega_{M1} t} + e^{-ik1 \cdot \omega_{M1} t}}{2} \frac{e^{ik2 \cdot \omega_{M2} t} + e^{-ik2 \cdot \omega_{M2} t}}{2} \right)$$

Ancora:

$$T_{M1, M2} = \Re \left( \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} i^{k1+k2} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) e^{i\omega_p t} (e^{ik1 \cdot \omega_{M1} t} + e^{-ik1 \cdot \omega_{M1} t}) (e^{ik2 \cdot \omega_{M2} t} + e^{-ik2 \cdot \omega_{M2} t}) \right)$$

$$T_{M1, M2} = \Re \left( \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} i^{k1+k2} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) e^{i\omega_p t} (e^{i(k1\omega_{M1}+k2\omega_{M2})t} + e^{i(k1\omega_{M1}-k2\omega_{M2})t} + e^{-i(k1\omega_{M1}-k2\omega_{M2})t} + e^{-i(k1\omega_{M1}+k2\omega_{M2})t}) \right) = \dots$$

$$\Re \left( \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} i^{k1+k2} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) (e^{i(\omega_p+k1\omega_{M1}+k2\omega_{M2})t} + e^{i(\omega_p+k1\omega_{M1}-k2\omega_{M2})t} + e^{-i(\omega_p+k1\omega_{M1}-k2\omega_{M2})t} + e^{-i(\omega_p+k1\omega_{M1}+k2\omega_{M2})t}) \right)$$

Dobbiamo qui distinguere il caso in cui  $k1 + k2$  sia pari o dispari.

1.  $k1 + k2$  pari, dunque  $i^{k1+k2} = (-1)^{\frac{k1+k2}{2}}$ . In questo caso abbiamo:

$$T_{M1, M2} = \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k1+k2}{2}} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) \cdot \cos((\omega_p + k1 \omega_{M1} + k2 \omega_{M2})t) + \cos((\omega_p + k1 \omega_{M1} - k2 \omega_{M2})t) + \dots$$

$$\cos((-\omega_p + k1 \omega_{M1} - k2 \omega_{M2})t) + \cos((-\omega_p + k1 \omega_{M1} + k2 \omega_{M2})t)$$

2.  $k1 + k2$  dispari, dunque  $i^{k1+k2} = (-1)^{\frac{k1+k2+3}{2}} i$ . In questo caso abbiamo

$$T_{M1, M2} = \sum_{k1=1}^{\infty} \sum_{k2=1}^{\infty} (-1)^{\frac{k1+k2+3}{2}} J(k1, A_{PM1})J(k2, A_{PM2}) \cdot \sin((\omega_p + k1 \omega_{M1} + k2 \omega_{M2})t) + \sin((\omega_p + k1 \omega_{M1} - k2 \omega_{M2})t) + \dots$$

$$\sin((-\omega_p + k1 \omega_{M1} - k2 \omega_{M2})t) + \sin((-\omega_p + k1 \omega_{M1} + k2 \omega_{M2})t)$$

Astraendo da fasi e segni, dunque, le frequenze presenti sono la somma della portante con la somma e la differenza tra le combinazioni di armoniche modulanti.

Per le pulsazioni di quest'ultimo termine abbiamo:

$$\omega_{k1,k2} = \omega_p \pm (k1 \cdot \omega_{M1} \pm k2 \cdot \omega_{M2}) \quad \text{(che dà luogo a quattro frequenze diverse)} \quad 40$$

Ogni termine ha come ampiezza:

$$A_{k1,k2} = 2 \cdot J(k1, A_{PM1}) J(k2, A_{PM2})$$

Riassumendo, possiamo affermare che i contributi di frequenza presenti nello spettro della PM2 sono i seguenti:

1. La frequenza della portante  $\omega_p$  (ved. eq. 37)
2. Le somme e differenze tra portante e armoniche della modulante 1 (39)
3. Le somme e differenze tra portante e armoniche della modulante 2 (39)
4. Le somme tra portante e le combinazioni di somme e differenze delle armoniche delle due modulanti.

Dalla 40 è facile intendere quanto popolato sia lo spettro del segnale risultante.

Un caso particolare è quello in cui tutti i rapporti siano armonici, ovvero le tre pulsazioni in gioco siano tutte armoniche di una fondamentale comune  $\omega_1$ :

$$\omega_{M1} = N_1 \omega_1; \quad \omega_{M2} = N_2 \omega_1; \quad \omega_p = N_p \omega_1$$

Abbiamo dalla 40:

$$\omega_{k1,k2} = \omega_1 \cdot (N_p \pm (k1 \cdot N_1 \pm k2 \cdot N_2))$$

Guardiamo al rapporto tra frequenze e fondamentale, tenendo conto del ribaltamento delle frequenze negative:

$$\frac{\omega_{k1,k2}}{\omega_1} = |N_p \pm (k1 \cdot N_1 \pm k2 \cdot N_2)|$$

E' facile notare che il membro a destra è comunque un numero intero.

In questo caso quello che si ottiene è un pettine di frequenze armoniche della medesima fondamentale comune.

## 13 Appendici

### 13.1 Script scilab per il calcolo dello spettro della PM a portante zero

Il seguente script calcola e visualizza lo spettro di una PM a portante zero, tenendo conto del fattore di fase citato in 29 a pag. 16.

```
// Calcolo spettro della PM con portante a zero
// Implementazione della formula 29 delle dispense
clear; // cancella variabili precedenti
xdel([winsid()]); // Cancella finestre precedenti
num = 170; // Prima modulante (Hz)
phiP = 0; // fase iniziale in radianti della portante. 0 significa coseno.
Im = 10; // Indice di modulazione
maxInd = 32; // massimo indice di componente frequenziale
// Ampiezza
for i=0:maxInd
    freqOrd(i+1) = num*i; // frequenza
    Amp(i+1) = abs(besselj(i,Im)*cos(phiP+%pi/2*i)); // Ampiezza con fattore di fase
```

```

end
// crea il grafico lineare
plot2d(freqOrd, Amp, logflag='nn', style = -3); // lo style fa fare i pallini
xgrid(15);
titolo(1)='Spettro calcolato di una PM a portante zero' ;
titolo(2)='Im = '+string(Im);
titolo(3)='Fase iniziale della portante = '+string(phiP) + ' (radianti)';
xtitle(titolo,'Hz','Ampiezza');

```

### 13.2 Script scilab per il calcolo dello spettro della PM a due modulanti

Il seguente script per scilab permette il calcolo e la visualizzazione dello spettro di una PM a due modulanti, date le tre frequenze e le due ampiezze di modulazione. Lo spettro è ottenuto con due metodi diversi, da mettere a confronto: prima per calcolo diretto, per mezzo delle formule fornite nel Cap. 12 , poi generando il segnale PM nel dominio del tempo e calcolandone lo spettro per mezzo di una FFT. I due risultati sono mostrati in due diverse finestre per confronto. Le lievi differenze sono dovute alla limitata finestra temporale del segnale, che allarga le righe, mentre il calcolo diretto equivale a considerare il segnale per  $-\infty < t < \infty$  .

```

// Calcolo spettri PM2 (modulazione di fase con due modulanti)
clear(); // cancella variabili precedenti
xdel([winsid()]); // Cancella finestre precedenti
nup = 2000; // Frequenza portante
num1 = 170; // Prima modulante
num2 = 230; // Seconda modulante
A1 = 3; // Ampiezza di modulazione (in radianti/sec) della prima modulante
A2 = 7; // Ampiezza di modulazione (in rad/sec) della seconda modulante
maxInd = 32; // massimo indice di componente frequenziale
// Calcolo delle componenti miste:
for i=1:maxInd
    for j=1:maxInd
        freqmx(1,i,j) = abs(nup+i*num1+j*num2); // componenti somma
        freqmx(2,i,j) = abs(nup+i*num1-j*num2); // componenti differenza
        freqmx(3,i,j) = abs(-nup+i*num1-j*num2); // componenti differenza
        freqmx(4,i,j) = abs(-nup+i*num1+j*num2); // componenti differenza
        // Ampiezze
        Amx(1,i,j) = besselj(i,A1)*besselj(j,A2);
        Amx(2,i,j) = Amx(1,i,j);
        Amx(3,i,j) = Amx(1,i,j);
        Amx(4,i,j) = Amx(1,i,j);
    end
end
// Calcolo delle componenti semplici
for i=1:maxInd
    freqs(1,1,i) = abs(nup+i*num1); // frequenze somma con prima modulante
    freqs(1,2,i) = abs(nup-i*num1); // frequenze differenza con prima modulante
    freqs(2,1,i) = abs(nup+i*num2); // frequenze somma con seconda modulante
    freqs(2,2,i) = abs(nup-i*num2); // frequenze differenza con seconda modulante
    // Ampiezze
    A(1,1,i) = besselj(0,A2)*besselj(i,A1);
    A(1,2,i) = A(1,1,i);
    A(2,1,i) = besselj(0,A1)*besselj(i,A2);
    A(2,2,i) = A(2,1,i);
end
// creare un unico vettore di frequenze
iDx = 1;
// frequenze miste
for i=1:maxInd
    for j=1:maxInd
        Freqs(iDx) = freqmx(1,i,j);
        Ampl(iDx) = Amx(1,i,j);
        iDx = iDx + 1;
        Freqs(iDx) = freqmx(2,i,j);
        Ampl(iDx) = Amx(2,i,j);
        iDx = iDx + 1;
        Freqs(iDx) = freqmx(3,i,j);
        Ampl(iDx) = Amx(3,i,j);
    end
end

```

```

        iDx = iDx + 1;
        Freqs(iDx) = freqmx(4,i,j);
        Ampl(iDx) = Amx(4,i,j);
        iDx = iDx + 1;
    end
end
// frequenze non miste
for i=1:maxInd
    Freqs(iDx) = freqs(1,1,i);
    Ampl(iDx) = A(1,1,i);
    iDx = iDx + 1;
    Freqs(iDx) = freqs(1,2,i);
    Ampl(iDx) = A(1,2,i);
    iDx = iDx + 1;
    Freqs(iDx) = freqs(2,1,i);
    Ampl(iDx) = A(1,1,i);
    iDx = iDx + 1;
    Freqs(iDx) = freqs(2,2,i);
    Ampl(iDx) = A(2,2,i);
    iDx = iDx + 1;
end
// La portante
Freqs(iDx) = nup;
Ampl(iDx) = besselj(0,A1)*besselj(0,A1);
// Ordina i dati in modo decrescente
[FreqsO,ord] = gsort(abs(Freqs),'r','i');
numData = length(ord);
for i=1:numData
    AmplO(i) = Ampl(ord(i));
end
// Grafico bilogaritmico dell'ampiezza versus frequenza
scf(0); // figura 0
// normalizziamo ad 1:
AmplO = AmplO/max(AmplO);
plot2d(abs(FreqsO), AmplO, logflag='ll', rect=[1,1e-5,2^15,1]);
xgrid(15);
titolo(1)='Spettro calcolato di una PM a due modulanti';
titolo(2)='Portante: '+string(nup)+' Hz - modulante 1: '+string(num1)+' Hz - modulante 2:
'+string(num2) + 'Hz';
titolo(3)="Ampiezza mod. 1: " + string(A1) + " Ampiezza mod. 2: " + string(A2);
xtitle(titolo,'Hz','Ampiezza');
// Calcolo diretto come fft del segnale
FS = 2^16; // frequenza di campionamento
DT = 1/FS;
n = (0:FS-1);
NY = FS/2; // Nyquist
t = n/FS; // vettore del tempo
M1 = A1*cos(2*pi*num1*t);
M2 = A2*cos(2*pi*num2*t);
Sout = cos(2*pi*nup*t + M1 + M2);
// Finestra di hamming
ww = window('hm',FS);
FSout = fft(Sout.*ww); // Trasformata di fourier con finestra
AFSout = abs(FSout); // Modulo, dunque spettro
AFSout = AFSout(1:NY); // solo mezzo spettro: in scilab è simmetrico
scf(1); // figura 1
f=(0:NY-1); // frequenze
// normalizziamo ad 1:
AFSout = AFSout / max(AFSout);
// plot
plot2d(f,AFSout,logflag='ll',rect=[1,1e-5,2^15,1]);
xgrid(15)
titolo(1)='Spettro via fft di una PM a due modulanti';
titolo(2)='Portante: '+string(nup)+' Hz - modulante 1: '+string(num1)+' Hz - modulante 2:
'+string(num2) + 'Hz';
titolo(3)="Ampiezza mod. 1: "+string(A1)+" Ampiezza mod. 2: "+string(A2);
xtitle(titolo,'Hz','Ampiezza');

```

## 14 Bibliografia

[1] Lorenzo Seno, *Modulazione di ampiezza e ad anello*, (dispense), Cap. 5.

<http://www.mnt-aq.it>

Versione: 1.1 del 8 Dicembre 2009

Testi, formule e figure: OpenOffice

Grafici, calcoli: Scilab

Calcolo simbolico: Maxima