Dispense di elaborazione analogica e numerica del segnale sonoro per la musica elettronica.

Richiami di algebra e matematica, e loro nessi con la musica

Dipartimento di Nuove tecnologie e linguaggi musicali

Scuola di Musica Elettronica

Conservatorio “A.Casella”' - L'Aquila - Italia

Indice generale

Simbologia usata nel testo:

$a \approx b$: circa uguale

$a \equiv b$: per definizione uguale

$a \cdot b$: Moltiplicazione esplicita

La moltiplicazione implicita (senza uno specifico segno) è contraddistinta da uno spazio: $a\,b = a \cdot b$

$a \Rightarrow b$: a implica b (se a è vero, allora b è vero)

$a \Leftrightarrow b$: doppia implicazione: (a è vero se e solo se b è vero)

1 Note sul copyright

2 Introduzione

Ricordiamo qui brevemente alcune nozioni di algebra che è indispensabile padroneggiare per affrontare lo studio della musica elettronica e della musica al computer.

Le tecniche di manipolazione simbolica algebriche si basano sull'uso di *proprietà* delle operazioni algebriche. Queste proprietà sono *astratte*, perché non dipendono dai particolari valori numerici assunti dai simboli algebrici. Sono proprietà, dunque, che valgono per qualsiasi valore numerico.

Ogni proprietà è il risultato (la conseguenza) di un determinato teorema, ovvero è una tesi dimostrabile mediante un procedimento che fa uso di proprietà più elementari, fino a risalire a proprietà non dimostrabili perché costituiscono la definizione delle entità di cui si tratta: gli *assiomi*.

Nel seguito non si forniranno dimostrazioni delle asserzioni universali (proprietà) enunciate. Chi avesse la curiosità di ripercorrere i procedimenti dimostrativi può rivolgersi ad un testo di algebra, o meglio ancora tentare di ricavare da solo le proprietà sfruttando quelle conosciute.

Nel seguito si farà inoltre uso del punto come separatore decimale, *secondo l'uso anglosassone e nei calcolatori elettronici.*

3 Proprietà fondamentali

3.1 Somma

Proprietà commutativa: $a+b=b+a$

Proprietà associativa: $a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c$

Zero: $a+0\equiv a$

3.2 Prodotto

Proprietà commutativa: $a\cdot b=b\cdot a$

Proprietà associativa: $a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

Uno: $a\cdot 1\equiv a$

3.3 Somme e prodotti

Proprietà distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

3.4 Differenza

Per definizione $a-b=c\Leftrightarrow a=c+b$

3.5 Quoziente

Per definizione $\frac{a}{b}=c\Leftrightarrow a=c\cdot b$

e dunque: $\frac{a}{b}=\frac{(c\cdot a)}{(c\cdot b)}$

Ovvero,come conseguenza, un fattore comune tra denominatore e numeratore può essere *semplificato (*cancellato, ovvero concettualmente sostituito con un 1).

3.6 Esponenziali

Potenze:

Prodotto (Formula di importanza capitale!) $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$ (1)

Esponenti negativi: $a^{-b}=1/a^b$

Potenza di potenza: $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$

Esponente zero: $a^0 = 1$

(conseguenza necessaria per rispettare la prima e la seconda proprietà qui enunciate!).

3.7 *Logaritmi*

Per definizione: $\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$

(Si legge: logaritmo in base a di y).

Dunque il logaritmo di un numero è l'esponente al quale bisogna elevare la base per ottenere il numero stesso. *Il logaritmo è dunque l'operazione inversa all'esponenziale (elevazione a potenza):*

$$\log_a(a^x) = x$$

Come conseguenza della (1) delle proprietà delle potenze qui enunciate:

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ *(Il logaritmo muta il prodotto in una somma).*

Come ulteriore conseguenza: $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$

e dunque: $\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$

Inoltre: $\log(x^y) = y \cdot \log(x)$

Cambiamento di base:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Quest'ultima relazione permette di calcolare il logaritmo in una base arbitraria, a partire dai logaritmi in una base conosciuta.

Le basi più utilizzate sono 10, 2 ed il numero trascendente e (2.7182818284590451...).

La base 10 è dovuta all'abitudine della specie umana a contare per dieci, dato che possiede 10 dita.

La base 2 è importante dal punto di vista musicale, come di vedrà oltre. Inoltre la numerazione in base 2 è quella utilizzata nell'elettronica numerica e nei calcolatori.

La base e deve la sua importanza all'esponenziale in base e, che gode di una notevole proprietà:

$$\frac{\partial e^t}{\partial t} = e^t$$

ovvero la derivata dell'esponenziale in base e è uguale a se stessa. Questa proprietà fa sì che le funzioni esponenziali in base e descrivano molti fenomeni importanti, in generale di *decadimento*. Ad esempio, negli strumenti musicali, il decadimento degli ipertoni di una corda per effetto di attriti; in elettronica, la scarica (e la carica) del condensatore.

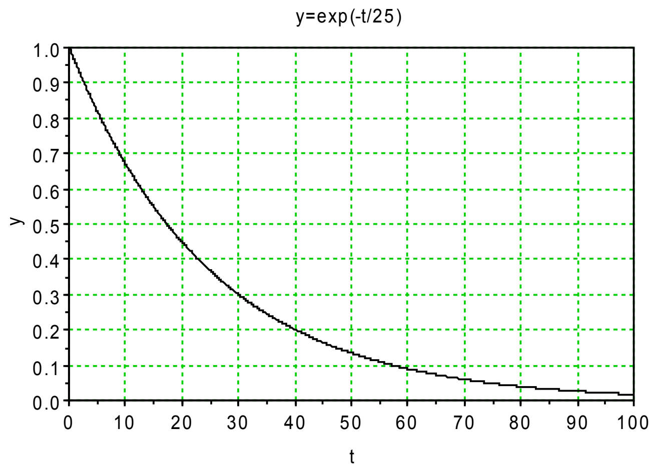


Fig. 1 - Funzione di decadimento: $y(t) = e^{-t/25}$

Un ulteriore modo di guardare ai logaritmi è quello di pensarli come il *numero di cifre* necessarie ad esprimere l'argomento. Naturalmente questo va preso *cum grano salis*, dato che si possono ottenere numeri di cifre frazionari, quando l'argomento non sia esattamente una potenza della base. La cosa non ha - in senso stretto - nessun senso, ma si può considerare il logaritmo come *un'estensione* del numero di cifre necessarie, con la parte frazionaria che esprime la "lontananza" dall'esatta potenza.

Da quanto detto è facile comprendere che il logaritmo cresce meno velocemente del suo argomento. E' una funzione *lenta*. Al contrario, l'esponenziale a^x è una funzione *veloce*. Questa è il motivo per il quale essi vengono usati nelle rappresentazioni grafiche.

L'importanza del logaritmo sta anche nel fatto che tutti i nostri sensi percepiscono l'intensità degli stimoli in modo approssimativamente logaritmico. Questo è il motivo per il quale le scale logaritmiche sono usate sia relativamente ai parametri del segnale suono, sia dell'intensità luminosa.

3.8 Logaritmi e rappresentazioni grafiche

Utilizzare i logaritmi nelle scale dei grafici comporta notevoli vantaggi. Dato che si tratta di una *funzione lenta,* il suo effetto è quello di far variare di meno funzioni “rapide”, permettendo un migliore colpo d'occhio. In particolare risulta utile la scala bilogaritmica, nella quale sia sull'asse x sia su quello y si riportano anziché le relative grandezze, il logaritmo x_l e y_l di queste grandezze.

$$y_l = \log_a(y) \quad x_l = \log_a(x) \text{ e all'inverso } y = a^{y_l} \quad x = a^{x_l}$$

Così facendo si ottiene un risultato notevole, legato alle proprietà dei logaritmi. Se originariamente avevamo il grafico di una $y(x)$, in questo modo otteniamo il grafico di $y_l = a^{x_l}$.

Se $y(x)$ è quella che viene chiamata una *legge di potenza,* cioè $y = x^n$, il grafico che se ne ottiene è una retta. Infatti:

$$y(x) = x^n \quad y_l = \log_a(y) \quad y_l = \log_a(x^n) \quad y_l = n \cdot \log(x) \quad y_l = n \cdot \log(a^{x_l}) \quad y_l = n \cdot x_l$$

L'ultima relazione esprime proprio una retta. La cosa interessante è che qualunque polinomio fratto è, per certe condizioni, molto vicino ad una legge di potenza.

$$\lim_{x \to \infty} (a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots + y \cdot x^1 + z \cdot x^0) = a \cdot x^n$$

Al limite per grandi valori dell'argomento, quindi, un polinomio appare, in scala bilogaritmica, come una retta di pendenza uguale al grado del polinomio. Se n è positivo, la pendenza è *positiva (*quindi la retta è crescente). Se il polinomio è al denominatore, invece, abbiamo un risultato del tutto analogo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(a \cdot x^n + b \cdot x^{n-1} + \ldots + y \cdot x^1 + z \cdot x^0)} = a^{-1} \cdot x^{-n}$$

Al limite per grandi valori dell'argomento, quindi, un polinomio al denominatore appare, in scala bilogaritmica, come una retta di pendenza *negativa (*calante). Anche per piccoli valori della x ($\lim_{x \to 0}$) un polinomio può essere abbastanza vicino ad una legge di potenza.

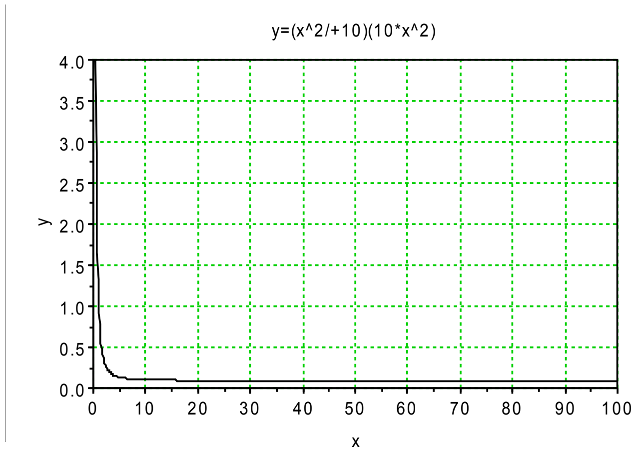


Fig. 2 - Grafico bilineare della funzione $y=\frac{x^2+10}{10\cdot x^2}$

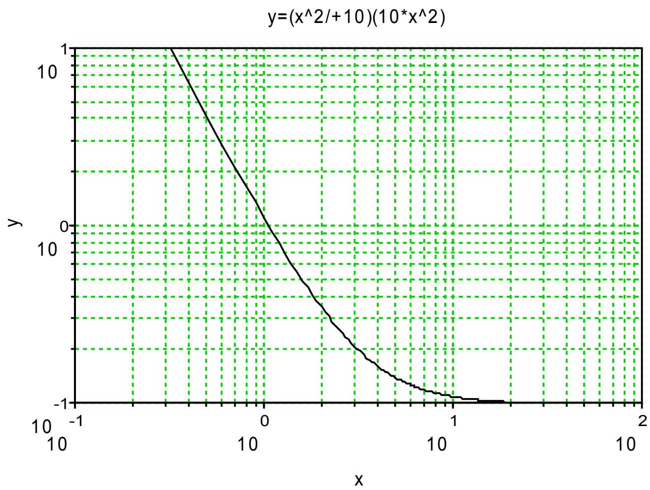


Fig. 3 - Stessa funzione, grafico bilogaritmico

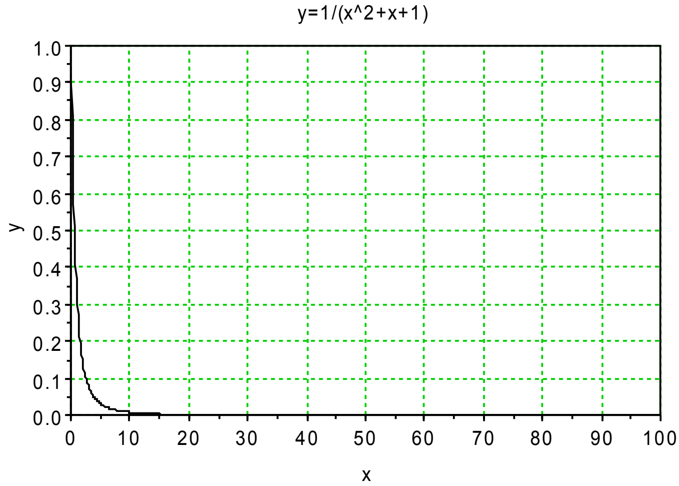


Fig. 4 - Grafico bilineare della funzione $y=\frac{1}{x^2+x+1}$

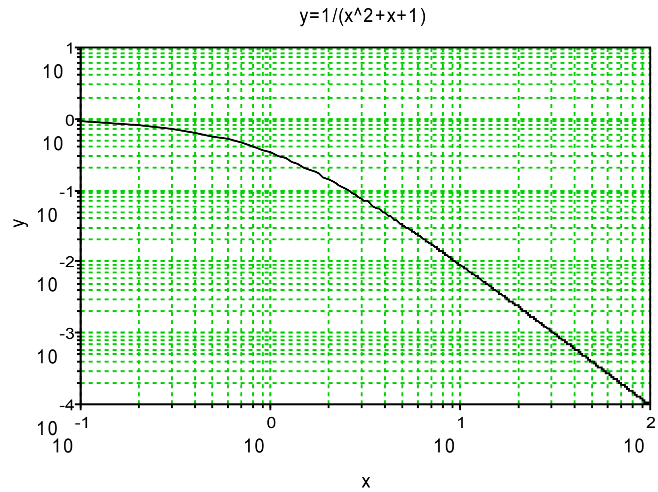


Fig. 5 - Stessa funzione, grafico bilogaritmico

4 Logaritmi e intervalli musicali

Gli intervalli musicali sono il logaritmo in base 2 delle frequenze: "sommare" un'ottava significa moltiplicare per due la frequenza. Sommare una dodicesima significa moltiplicare per 3. L'intervallo musicale che c'è tra due frequenze ν, espresso in ottave, è dunque:

$$I_{m8}=\log_2(\frac{\nu_2}{\nu_1})=\log_2(\nu_2)-\log_2(\nu_1)$$

Se $\nu_2=2\cdot\nu_1$ (ν_2 è un'ottava sopra ν_1), $I_{m8}=1$ (un'ottava *sopra,* visto che 1 ha il segno positivo).

Se $\nu_2=2/3\cdot\nu_1$ (ν_2 è una quarta aumentata sopra ν_1), $I_{m8}=0.5$ *(*mezza ottava sempre *sopra*, visto il segno positivo di I_{m8}).

I_{m8} esprime dunque l'intervallo musicale in ottave (una quarta aumentata è infatti mezza ottava).

La circostanza che I_{m8} esprime l'intervallo proprio in ottave dipende dalla scelta della base del logaritmo. 2 è infatti proprio il rapporto di frequenze tra due note all'ottava.

Assumendo una base diversa, possiamo ottenere l'intervallo espresso come multiplo/sottomultiplo di un intervallo qualunque.

Un semitono (equabile) è, per definizione, la dodicesima parte di un'ottava. Questo significa dunque che la potenza dodicesima di un semitono è pari a due. Se chiamiamo s il rapporto tra due frequenze distanti un semitono:

$$s^{12}=2 \text{ quindi } s=2^{\frac{1}{12}} \text{ e dunque } s=1.0594630943592953...$$

Un semitono corrisponde quindi ad una variazione di frequenza di circa il 6%.

Un cent è la centesima parte di un semitono:

$$c^{100}=s=1.0594630943592953... \text{ dunque } c=s^{\frac{1}{100}} \quad c=1.0005777895065548...$$

Dunque un cent corrisponde ad una variazione di frequenza del 5.778 per diecimila, ovvero di 577.8 ppm (parti per milione).

Dunque, per la definizione di logaritmo:

$$I_s=\log_s(\nu_2/\nu_1)$$

fornisce l'intervallo tra due frequenze espresso in semitoni (in *numero di semitoni*, anche frazionari).

$$I_c=\log_c(\nu_2/\nu_1)$$

fornisce l'intervallo tra due frequenze espresso in cent (in *numero di cent*, anche frazionari).

Esempio 1

$\nu_1 = 440\text{Hz} \quad \nu_2 = 523.251\text{Hz}$

$$s = \log_s\left(\frac{523.251}{440}\right) = \frac{\log_{10}\left(\frac{523.251}{440}\right)}{\log_{10}(s)}$$

Dato che $\log_{10}(s) = 0.066946789630613221$ abbiamo $s=3$, ovvero 3 semitoni, ovvero ancora una terza minore.

In effetti, ν_2 è la frequenza del *do* centrale in temperamento equabile, mentre ν_1 è il *la* corista.

5 Logaritmi e intensità sonore

I nostri sensi, in particolare l'udito, percepiscono le ampiezze in modo approssimativamente logaritmico. Due suoni di ampiezza diversa appaiono “distanti" proporzionalmente al loro rapporto, non alla loro differenza.

Per questo la scala normalmente utilizzata per esprimere rapporti di ampiezze sonore è logaritmica: il logaritmo muta – ricordiamolo - un rapporto in una differenza.

La scala logaritmica normalmente usata è il deciBel (un decimo di Bel, una unità troppo grande per essere utile).

Il deciBel (abbreviato: dB) esprime un rapporto tra due ampiezze $A1$ e $A2$ nel seguente modo:

$$\rho_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{A2}{A1}\right)$$

Il rapporto tra le ampiezze, conoscendo il loro rapporto espresso in dB, è dunque:

$$\frac{A2}{A1} = 10^{\frac{\rho_{dB}}{20}}$$

Valori notevoli:

A questo punto è bene rammentare i seguenti *valori notevoli*, di uso quotidiano:

- Aggiungere 20 dB equivale a moltiplicare per 10
- Sottrarre 20 dB (o sommare -20 dB) equivale a dividere per 10.
- Aggiungere 40 dB equivale a sommare 20 + 20 dB e quindi a moltiplicare per 10 e poi ancora per 10, quindi a moltiplicare per 100.
- Ogni 20 dB significano uno zero in più (o in meno, se il segno è negativo).
- 3 dB significano un fattore 1.4125375446227544 (un valore vicino ma non identico a $\sqrt{2}$).
- 6 dB significano un fattore 1.9952623149688797 (un valore vicino ma non identico a 2).
- 10 dB significano un fattore 3.1622776601683795
- -3 dB significano un fattore 1/1.412537544622754=0.70794578438413791
- -6 dB significano un fattore 1/1.9952623149688797=0.50118723362727224 (circa 0.5)
- -10 dB significano un fattore 1/3.1622776601683795 =
  = 0.31622776601683794 (circa 1/3)

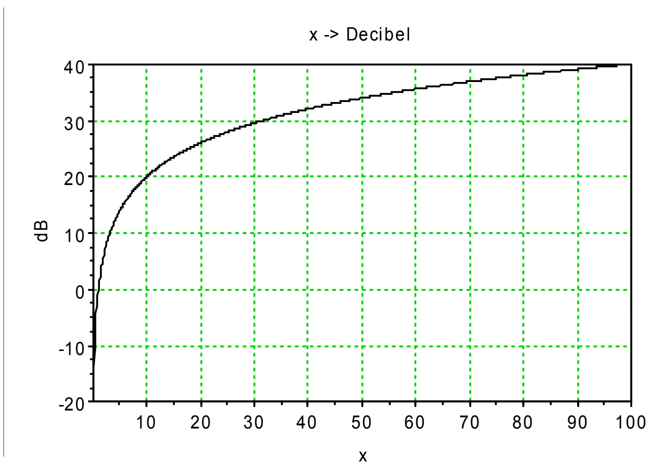


Fig. 6 - Decibel in funzione del rapporto (andamento logaritmico)

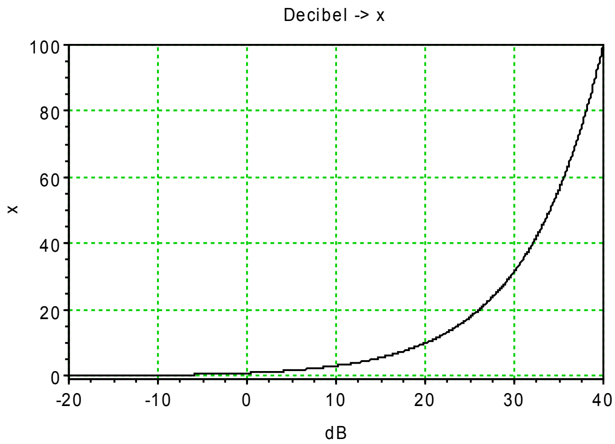


Fig. 7 - Rapporti in funzione dei dB (andamento esponenziale)

6 I numeri complessi, la loro algebra, e loro nessi con il suono

La comprensione dell'algebra dei numeri complessi è indispensabile per l'elaborazione di segnale, in particolare per la trasformata di Fourier, che è il nucleo centrale della rappresentazione del segnale musicale. Alcune operazioni sui segnali come lo *spostamento di frequenza (frequency shift)* sono comprensibili (e fattibili) solo nel dominio dei numeri complessi. Anche negli argomenti che permetterebbero un approccio puramente reale, l'introduzione dei numeri complessi (ad onta del loro nome) *semplifica* enormemente la trattazione e rende più chiari ed intuitivi ragionamenti e risultati.

L'algebra dei numeri complessi *è semplice*, e in molti casi permette di sostituire le operazioni su funzioni trigonometriche (i cui teoremi sono difficili da ricordare e dimostrare) con semplici operazioni su esponenziali.

Dalla regola dei segni del prodotto: $(+\cdot-)=(-\cdot+)=-$; $(+\cdot+)=(-\cdot-)=+$ è facile mostrare che nessun numero (tra quelli conosciuti, ovvero i numeri *reali*) può soddisfare la seguente equazione:

$$i=\sqrt{(-1)} \tag{2}$$

Nessun numero (nel senso ordinario della parola) moltiplicato per se stesso può infatti fornire un risultato negativo.

Nel seguito apparirà però sempre più chiaro che introdurre un nuovo tipo di numeri, basati sulla radice di -1, semplifica molti concetti e permette di esplicitare nessi tra cose apparentamene irrelate, come ad esempio le funzioni trigonometriche e quelle esponenziali, e permette di effettuare manipolazioni algebriche di radici di equazioni anche là dove ciò non sarebbe possibile nel dominio reale.

Definiamo i *numeri immaginari* come quei numeri del tipo: $\Im=a\cdot i$, prodotto di un numero reale (ovvero ordinario) a per l'unità immaginaria definita dalla (2). Questa semplice generalizzazione ci permette di esprimere la radice quadrata di qualsiasi numero negativo, seguendo semplicemente le regole dell'ordinaria algebra:

$$\sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1 \cdot a)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(a)} = i \cdot \sqrt{(a)}$$

Questa semplice notazione permette di guardare alle equazioni reali in un modo diverso. Consideriamo ad esempio la classica equazione di secondo grado:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad (3)$$

Rammentiamone l'interpretazione geometrica: la funzione

$$y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

rappresenta una parabola la cui concavità è determinata dal segno di a (a positiva, concavità verso l'alto, a negativa, concavità verso il basso). Le soluzioni della equazione (3) sono i punti (eventuali) di intersezione della parabola con l'asse delle x. Un altro modo di scrivere la (3) è infatti $y(x) = 0$, mostrando così che le soluzioni della (3) sono i punti in cui y vale 0.

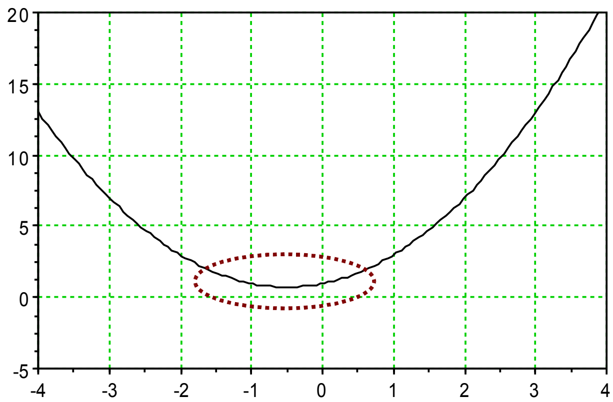


Fig. 8 -Nessuna soluzione (reale)

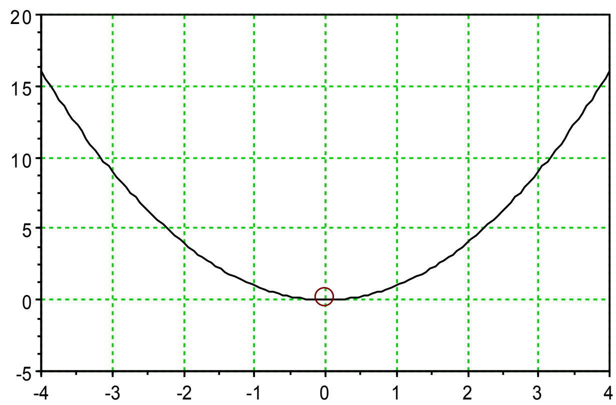


Fig. 9 - Due soluzioni reali coincidenti (tangenza)

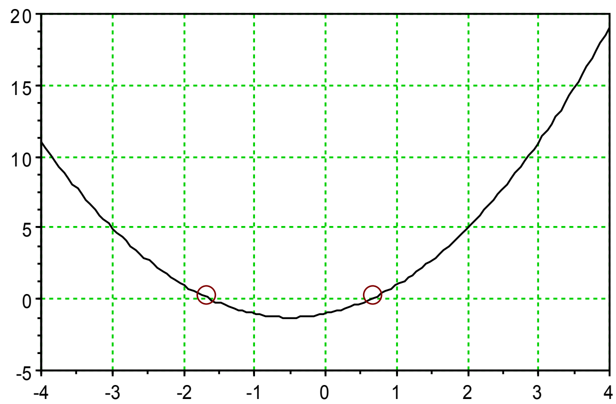


Fig. 10 - Due soluzioni reali distinte

Rammentiamo ancora la *formula risolvente* che fornisce le radici dell'equazione di secondo grado:

$$x_{r1,r2}=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4\cdot a\cdot c)}}{2\cdot a} \qquad (4)$$

Essa è stata ottenuta mediante passaggi algebrici (ovviamente tutti legittimi) nel campo dei numeri reali.

Come si vede, l'esatto numero di radici ottenute (0, 1 o 2) dipende dal radicale. Si hanno tre casi (in ordine inverso rispetto alle figure):

1. $b^2-4\cdot a\cdot c>0$: il radicale esiste, ed il segno ± davanti fornisce le due alternative per le due radici distinte (Fig. 10). Il punto $-b/2\cdot a$ è il *centro di simmetria* delle due radici, ovvero *l'ascissa del vertice* della parabola.

2. $b^2-4\cdot a\cdot c=0$: il radicale esiste, ma è pari a zero. Le due radici esistono ma coincidono: entrambe hanno il comune valore $-b/2\cdot a$ (condizione di tangenza, Fig. 9). In queste condizioni, ovviamente, le due radici coincidono con il loro centro di simmetria e con il vertice della parabola.

3. $b^2-4\cdot a\cdot c<0$: si tratta della radice di un numero negativo. Questa situazione corrisponde al caso di Fig. 8, e ovviamente indica che non esiste nessuna radice *ordinaria*.

Introducendo i numeri immaginari siamo però in grado di esprimere anche le radici dei numeri negativi. Quindi, il nostro caso 3 può essere scritto nel seguente modo:

$$\sqrt{(b^2-4\cdot a\cdot c)}=i\cdot\sqrt{(|b^2-4\cdot a\cdot c|)} \quad \text{per} \quad b^2-4\cdot a\cdot c<0$$

La nostra formula risolvente (4) diventa:

$$x_{r1,r2}=\frac{-b\pm i\cdot\sqrt{|b^2-4\cdot a\cdot c|}}{2\cdot a} \quad \text{per} \quad b^2-4\cdot a\cdot c<0$$

Stiamo scrivendo apparentemente una strana cosa: una coppia di numeri composti ognuno dalla somma di un numero reale (ordinario) e da un numero immaginario:

$$x_{r1}=\frac{-b}{2\cdot a}+i\cdot\frac{\sqrt{|b^2-4\cdot a\cdot c|}}{2\cdot a} \quad ; \quad x_{r2}=\frac{-b}{2\cdot a}-i\cdot\frac{\sqrt{|b^2-4\cdot a\cdot c|}}{2\cdot a} \tag{5}$$

Possiamo dunque dire che un numero siffatto è composto da una *parte reale* e da una *parte immaginaria*, sommate tra loro. Un numero siffatto è chiamato *complesso*. Introducendo i numeri complessi, il numero di radici dell'equazione di secondo grado è ora costante: sempre due. In generale, le radici di una equazione, in questo modo, sono sempre pari al grado dell'equazione. In generale, alcune saranno reali, altre complesse.

E' opportuno notare che così procedendo, i numeri complessi sono una *estensione* dei numeri reali. Questi ultimi sono infatti un caso particolare di numero complesso: sono numeri complessi con la parte immaginaria pari a zero. Analogamente, i numeri immaginari altro non sono che numeri complessi con parte reale pari a zero.

Naturalmente l'avere attribuito un nome all'entità non scioglie certo da solo il problema, la strana circostanza, davanti al quale ci troviamo: è infatti ovvio che la somma tra le due parti, reale e immaginaria, non può essere presa nel suo senso normale. Non si possono sommare pere con mele, come recita una vecchia regola delle scuole elementari. Resta quindi da esplorare se una tale scrittura abbia un senso (e quindi un'utilità) ed eventualmente quale, o se si riduca ad un mero esercizio calligrafico.

Come vedremo, è possibile ridefinire quella somma in modo tale, da una parte, da interpretare in modo significativo i numeri complessi, e dall'altra da restare dentro le regole dell'algebra così come le abbiamo conosciute finora (e quindi, in un certo senso, quel segno di somma resta un segno di somma, perché come tale va trattato nell'algebra dei numeri complessi).

In effetti, se proviamo a sostituire alla x nella parabola non intersecante e non tangente i due valori della (5), ed eseguiamo tutti i calcoli seguendo le regole dell'algebra ordinaria, trattando i segni di operazione come i segni usuali, e la i come un normale simbolo algebrico, otterremo in entrambi i casi 0 (uno zero ordinario, *reale)* come risultato, a patto di ricordarsi di sostituire -1 all'espressione i^2.

Non sarebbe difficile provare che questo avviene anche per equazioni di grado superiore (delle quali si conoscano formule risolventi: quindi di terzo e quarto grado).

Questo significa piuttosto semplicemente che x_{r1} e x_{r2} continuano ad essere, anche quando siano complesse, le effettive radici della equazione.

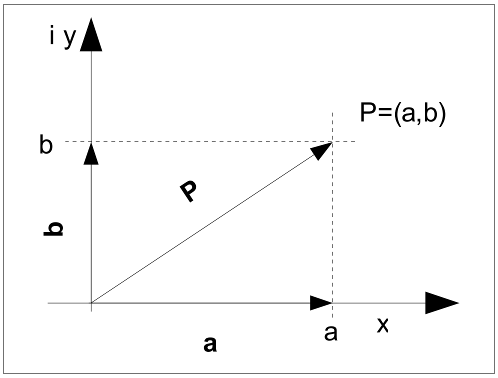
Ma questo significa anche che l'introduzione dei numeri complessi e la loro scrittura come somma di un numero reale e di uno immaginario ha senso dal punto di vista algebrico, e non introduce antinomie nell'algebra e nelle sue regole formali, che continuano a valere anche per questa *estensione* del campo numerico.

Resta tuttavia la circostanza che questa somma può essere indicata, ma effettivamente eseguita solo quando le regole dell'algebra riportino le parti immaginarie nel campo reale. E questo effettivamente avviene ogni volta che ci si trovi a fare il prodotto di due numeri immaginari: *il prodotto di due numeri immaginari è infatti un numero reale*.

Sull'onda di questa considerazione, possiamo guardare ai numeri complessi come coppie ordinate:

$$a+i\cdot b\equiv(a,b)$$

Una coppia ordinata definisce, come noto, un punto su di un piano (il punto che ha come coordinate proprio quella coppia).



Fig, 11 - Numero complesso come somma di vettori

Viene spontaneo a questo punto chiamare gli assi come sono stati indicati, con la iy ad indicare l'asse destinato ad ospitare le parti immaginarie. E' anche ben evidente la natura dei complessi come estensione dei reali e insieme degli immaginari: i primi sono confinati sull'asse delle x, i secondi su quello delle y. I complessi occupano tutto il piano (che chiameremo *piano complesso*), ivi inclusi gli assi come casi particolari. In questa luce, è anche piuttosto spontanea la reinterpretazione di quel segno di somma fra parte reale e parte immaginaria: essa è da intendersi come la somma di due vettori (*il parallelogramma delle forze*), del vettore $\vec{a}$ e del vettore $\vec{b}$. In effetti, secondo la regola del parallelogramma delle forze:

$$\vec{P}=\vec{a}+\vec{b}$$

E' facile verificare che questa interpretazione continua ad essere perfettamente compatibile con le regole dell'algebra (anche quella dei vettori). In effetti, seguendo le regole dell'algebra ordinaria, scopriamo che la somma di numeri complessi è proprio una somma di vettori:

$$\vec{P}_1=(x_{1,}y_1) \quad \vec{P}_2=(x_{2,}y_2)$$
$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=(x_1+x_{2,}y_1+y_2)$$

Infatti, seguendo l'algebra ordinaria, avremmo eseguito la somma esattamente nello stesso modo, raccogliendo a fattore comune:

$$(x_1+i\cdot y_1)+(x_2+i\cdot y_2)=x_1+x_2+i\cdot(y_1+y_2)$$

Dunque, nella somma di due numeri complessi, *la parte reale è la somma delle parti reali, e la parte immaginaria la somma delle parti immaginarie*.

Resta ora da domandarsi cosa ne sia del *prodotto* tra numeri complessi. Seguendo le regole dell'algebra, sappiamo come eseguirlo:

$$(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+i\cdot y_2)=(x_1\cdot x_2-y_1\cdot y_2)+i\cdot(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)$$

Esiste però una interpretazione particolarmente interessante del prodotto complesso, che è facile scoprire tornando al piano complesso e ricordando le *definizioni* delle funzioni seno e coseno.

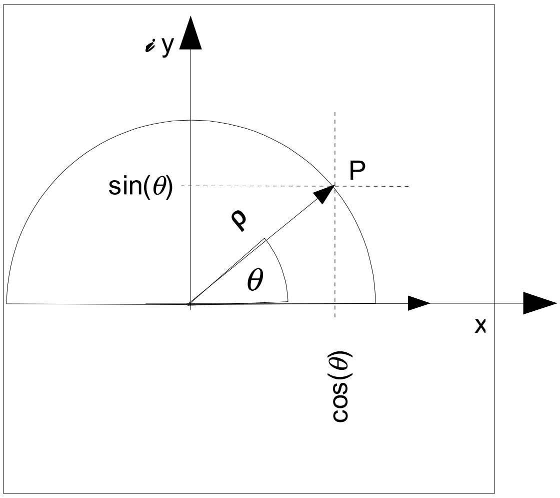


Fig. 12 - Definizioni di seno e coseno

Si ricorda che il seno ed il coseno di un angolo sono appunto rispettivamente la coordinata x e la coordinata y del punto individuato dall'angolo θ su di un cerchio di raggio ρ unitario.

Un punto nel piano complesso (ovvero un numero complesso, *sic et simpliciter*) può essere dunque scritto anche in questo modo:

$$(a, b) \equiv a + i \cdot b = \rho \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

ovvero come punto su di un cerchio di raggio in generale non unitario.

La prima forma è detta *rappresentazione cartesiana*, la seconda *rappresentazione polare* del numero complesso. Esse sono perfettamente equivalenti (ovviamente: definiscono lo stesso punto) a patto che:

$$a = \rho \cdot \cos(\theta) \;\; ; \quad b = \rho \cdot \sin(\theta)$$

Ovvero ancora, invertendo la formula:

$$\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)} \;\; ; \quad \theta = acos(\frac{a}{\rho}) \quad \text{oppure} \quad \theta = asin(\frac{b}{\rho}) \quad \text{o ancora} \quad \theta = atan(\frac{a}{b})$$

ρ prende il nome di *modulo* del numero complesso, e θ prende il nome di *fase*. Il modulo è un operatore già noto nel campo dei reali, e restituisce il suo argomento ma preso sempre con il segno positivo (è detto anche *valore* assoluto). Si scrive $|a|$. Il modulo che stiamo qui introducendo è anch'esso una estensione del modulo reale (si riduce ad esso, se l'argomento è un reale). Si scrive:

$$\rho = |a + i \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Il prodotto tra due complessi prende ora una forma che ci condurrà ad un risultato molto significativo, e di importanza capitale quando si introdurranno i *fasori*, ovvero numeri complessi che ruotano, e che descrivono in questo modo i *segnali (*che siano sonori o meno).

Riscriviamo ora il prodotto di due numeri complessi in forma polare:

$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=\rho_1\cdot(\cos(\theta_1)+i\cdot\sin(\theta_1))\cdot\rho_2\cdot(\cos(\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_2))$$
$$\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2=\rho_1\cdot\rho_2\cdot(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))+i\cdot(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_2)\cos(\theta_1)) \quad 6$$

Si tratta di una formula solo apparentemente complicata, perché sviluppando i termini tra parentesi a destra della seconda riga, contenenti le fasi dei due termini, essa si semplifica drasticamente:

$$P_1\vec{P}_2=\rho_1\cdot\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)) \quad 7$$

E' questo un risultato di straordinaria importanza, e che può essere letto in questo semplice modo:

Il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come fase la somma delle fasi.

Ma sommare le fasi corrisponde a ruotare il vettore P. Dunque il prodotto di due numeri complessi può essere ancora interpretato così:

Moltiplicare un numero complesso P_1 ***per un altro numero complesso*** P_2 ***significa ruotare*** P_1 ***di un angolo pari alla fase di*** P_2 ***(***oppure *ruotare* P_1 *della fase di* P_2 ***)*** e poi modificare il modulo rendendolo pari al prodotto di due moduli.

In particolare quindi:

La moltiplicazione per un numero complesso con modulo unitario equivale ad una rotazione pura (cioè, il modulo resta invariato). In elaborazione del segnale, vedremo come questo permetta di costruire oscillatori.

Questi risultati sono dovuti ad un teorema centrale della trigonometria:

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \quad 8$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \quad 9$$

E' facile rintracciare la 8 nella parte reale della 6, e la 9 in quella immaginaria, ad ottenere la 7.

Le notevoli conseguenze della introduzione della radice di -1 non si fermano qui. La 7 permette ancora un'altra interpretazione ancora più significativa. Infatti la seguente scrittura porta a risultati del tutto equivalenti:

$e^{i\theta}=(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ 10

Questa scrittura è perfettamente sensata. Infatti, applicando le semplici regole dei prodotti tra esponenziali otteniamo esattamente il prodotto tra numeri complessi, in una maniera straordinariamente semplice e diretta.

$$P_1 \cdot P_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Basta infatti ricordare la (1) per ritrovare rapidamente il risultato. La (10), di importanza fondamentale nella matematica dei complessi e nell'elaborazione di segnale, prende il nome di formula di Eulero.

Una interessante conseguenza è la *formula di De Moivre*:

$$(e^{i\theta})^n = e^{i\theta n}$$

Ovvero il risultato a questo punto banale che la *n-esima potenza di un numero complesso equivale ad applicare n volte la stessa rotazione*.

6.1 Complesso coniugato

Due numeri complessi con medesima parte reale e parte immaginaria di segno opposto si dicono *coniugati tra loro* (la relazione è evidentemente reciproca, se x è il coniugato di y, allora y è il coniugato di x).

$a+i\cdot b$ è il coniugato di $a-i\cdot b$ (e viceversa).

Il coniugato di un numero (complesso) si indica apponendo un asterisco in alto a destra, o più spesso un barretta sopra il simbolo:

Il coniugato di x si indica dunque con $\bar{x}$ [1].

E' facile convincersi che due coniugati hanno lo stesso modulo: $|a+i\cdot b|=|a-i\cdot b|=\sqrt{a^2+b^2}$

Eseguendo il calcolo, è facile anche convincersi che il prodotto di un complesso per il proprio coniugato è un numero reale, pari proprio al quadrato del modulo:

$$(a+i\cdot b)(a-i\cdot b)=a^2+b^2$$

Le proprietà dei coniugati tornano utili nelle manipolazioni algebriche quando si abbia a che fare con inversi di numeri complessi, e li si voglia ridurre nella forma usuale di somma di un numero reale e di uno immaginario. Basta moltiplicare numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore.

Ecco i passaggi, in chiave simbolica:

1 Talvolta con un asterisco in alto a destra: x^*

$$\frac{1}{x}=\frac{\bar{x}}{x\cdot\bar{x}}=\frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

In questo modo, abbiamo ottenuto un complesso nella sua forma normale: il numeratore è un complesso (in forma normale) e il denominatore è un numero reale.

6.2 Parte reale e parte immaginaria

Si indicano rispettivamente come parte reale e parte immaginaria di un numero complesso $a+i\cdot b$ i due *numeri reali:*

$$\Re(a+i\cdot b)=a$$
$$\Im(a+i\cdot b)=b$$

Vale la pena di notare due proprietà che torneranno utili:

$$\Re(x)=\frac{x+\bar{x}}{2} \quad \text{ovvero} \quad \rho\cdot\cos(\theta)=\frac{\rho}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$$

$$\Im(x)=\frac{x-\bar{x}}{2i} \quad \text{ovvero} \quad \rho\cdot\sin(\theta)=\frac{\rho}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$

Queste ci permettono di esprimere la parte reale (o quella immaginaria) di un numero complesso attraverso un'espressione complessa.

7 Combinazione lineare

Questo breve paragrafo si propone di introdurre un concetto matematico basilare in tutta l'elaborazione di segnale, quello di *combinazione lineare*.

Si dice combinazione lineare di N grandezze x_n la somma di queste, ciascuna moltiplicata per una costante.

$$y=a_0x_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n+\ldots+a_Nx_N$$

In una forma più compatta:

$$y=\sum_0^N a_n\cdot x_n$$

Si dice che y è una *combinazione lineare* (oppure una *sovrapposizione*) dei termini x. Gli a_n prendono il nome di *coefficienti* della combinazione.

Questa espressione prende il suo nome dalla circostanza che, per definizione, un sistema è detto *lineare* se e solo se *conserva la combinazione lineare in ingresso*. In altre parole, se in ingresso gli viene somministrata una combinazione lineare, in uscita troveremo la medesima combinazione lineare (*con i medesimi coefficienti*) delle risposte ai singoli termini della combinazione stessa.

In altre parole, se un sistema fornisce l'uscita y_n all'ingresso x_n, esso è lineare se applicando all'ingresso una combinazione lineare degli x_n avremo come uscita la medesima combinazione delle y_n, e questo resta vero qualunque siano gli ingressi x_n e comunque si scelgano i coefficienti a_n.

Se un sistema è lineare, se $y_n = output(x_n)$, allora $y = output(\sum_0^N a_n \cdot x_n)$ e $y = \sum_0^N a_n \cdot x_n \forall x_n, a_n$[2].

Vale la pena di fare notare che un mixer audio esegue una combinazione lineare dei suoi N ingressi. Ciascun ingresso è infatti *amplificato* (moltiplicato per una costante a_n) in base alla posizione del relativo cursore, e i segnali così amplificati sono poi sommati assieme per fornire l'uscita.

8 Numeri

Questo paragrafo, dal titolo non a caso (come si vedrà) biblico, si propone lo scopo di richiamare alcune nozioni basilari sui numeri, nozioni che hanno importanti riferimenti in campo musicale (specificamente nella *intonazione* e nei *temperamenti*).

Numeri naturali: 0, 1, 2, ... n, ... ∞

Numeri relativi: -∞, ... -n, ... , -2,-1,0, 1, 2, n, ... ∞

Sia i naturali che i relativi sono infiniti, ma restano *numerabili* (cioè contabili). Un insieme è numerabile se è possibile porre i suoi elementi in corrispondenza biunivoca con i naturali. E' esattamente l'operazione che facciamo contando: 1, 2, 3, ...

Ci si può domandare come si faccia a contare i relativi, che a prima vista sembrano più dei naturali, dato che sono infiniti sia a sinistra che a destra. E' facile:

0, 1, -1, 2, -2 ... sequenza dei relativi opportunamente arrangiata per il conteggio[3].

I relativi sono quindi contabili, e quindi sono *tanti quanti i naturali*.

Si noti che i naturali sono un sottoinsieme proprio dei relativi. Qui si sta dunque affermando che un insieme ha tanti elementi quanti un suo sottoinsieme proprio. Se questo è impossibile per gli insiemi finiti, lo è invece (come abbiamo appena mostrato) per gli insiemi infiniti. Non si tratta che di una conseguenza

2 Il simbolo $\forall$ è il “quantificatore universale” della logica dei predicati del primo ordine, e si legge “qualunque sia”'. Il quantificatore opposto è quello *esistenziale* e si indica con $\exists$, che si legge “esiste almeno un”.
3 Si tratta di solo uno degli infiniti modi di contare i relativi.

della circostanza che $\infty+\infty=\infty$.

Il numero degli elementi di un insieme si chiama *cardinalità* dell'insieme. Se l'insieme è finito (e numerabile) essa è pari al numero dei suoi elementi. E' tuttavia definita simbolicamente anche la cardinalità infinita dei naturali, e si indica convenzionalmente con la prima lettera dell'alfabeto ebraico, con il pedice 0, *aleph con zero*: $\aleph_0$.

La cardinalità dei naturali e dei relativi è $\aleph_0$. Un insieme (infinito) che abbia questa cardinalità è detto anche *discreto*, oppure che ha la *potenza del discreto*.

Numeri razionali: sono il quoziente di due numeri interi.

$$r_{n,m}=\frac{n}{m}$$

I numeri razionali sono sostanzialmente *coppie ordinate* di numeri interi: (n,m) .

Anche i razionali sono numerabili, e sono quindi tanti quanti i naturali. La loro cardinalità è $\aleph_0$, sono un insieme discreto che possiede (quindi) la potenza del discreto.

Ci si può domandare come si possa fare a contarli, visto che sembrano possedere una “infinità a due dimensioni”.

E' semplice. Si mettano i razionali in tabella come segue:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \dots \\ & \dots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots \\ & \dots & & \end{array}$$

A questo punto possiamo procedere a contarli come nella figura[4].

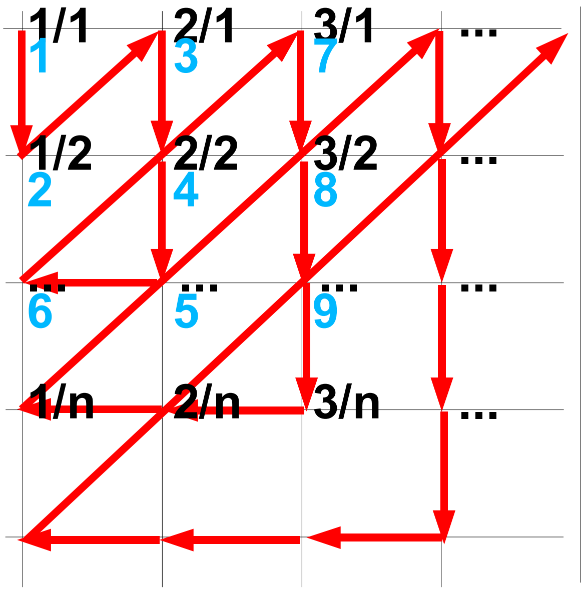


Fig. 13 - Numerazione dei razionali. In azzurro il conteggio.

I razionali dunque sono tanti quanti i naturali, anche se (come già visto per i relativi) questi ultimi sono dei razionali un sottoinsieme proprio.

I razionali costituiscono dunque anche essi un insieme infinito ma discreto.

Numeri algebrici: sono tutti i numeri della forma:

$$r_{n,m,j,k}=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{j}{k}}$$

con n,m,j,k interi. Un razionale, cioè, elevato ad un esponente razionale.

I numeri algebrici sono sostanzialmente delle quadruple ordinate di interi: (n,m,j,k).

Numeri algebrici sono, ad esempio: $\sqrt{(2)},\sqrt[3]{3},\sqrt[12]{2},\sqrt[7]{\frac{2}{3}^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{4}}$ [5].

Anche i numeri algebrici contengono i razionali come sottoinsieme proprio (esponente $1/1$), ma sono anch'essi numerabili, discreti, ecc. Lo si può mostrare operando come in Fig. 13 , con la difficoltà supplementare di dovere immaginare un ipercubo a quattro dimensioni sul quale disporre le nostre quadruple. A parte questa difficoltà di ordine pratico, essi sono numerabili.

4 Si tratta solo di uno degli infiniti modi di contare i razionali.

5 Il lettore più accorto avrà forse riconosciuto in $\sqrt[12]{2}$ il *semitono*, dodicesima parte dell'ottava (cioè, di una frequenza doppia).

Numeri reali. Se all'insieme degli algebrici aggiungiamo tutti i limiti di loro successioni convergenti otteniamo i numeri reali. I reali che non sono algebrici sono detti *numeri trascendenti*. I propriamente algebrici più i trascendenti (quindi, i *non razionali*) sono detti *irrazionali*.

Il più famoso (e antico) numero trascendente è $\pi=3{,}1415\ldots$. Come noto, esso esprime il rapporto tra circonferenza e diametro di un cerchio (oppure: la circonferenza di un cerchio di diametro unitario). E' noto anche il procedimento con il quale si costruisce (e definisce) questo numero. Si inscrive un triangolo nel cerchio. Il suo perimetro P_3 sarà inferiore alla circonferenza $\mathscr{C}$. Si costruisce il quadrato inscritto. Il suo perimetro P_4 sarà inferiore alla circonferenza $\mathscr{C}$ ma superiore al perimetro del triangolo P_3. ... Si costruisce il poligono inscritto a n lati. Il suo perimetro P_n sarà tale che:

$$P_3<P_4<P_5<\ldots<P_n<\mathscr{C}$$

I perimetri dei poligoni inscritti si dispongono dunque in una successione ordinata che converge a $\mathscr{C}$: $\lim_{n\to\infty} P_n=\mathscr{C}$. Analogamente i rapporti tra perimetri dei poligoni e diametro del cerchio si dispongono in una successione convergente verso un numero convenzionalmente indicato con π .

Si dimostra che π non è algebrico, non è cioè esprimibile come un razionale elevato ad un esponente razionale. I rapporti tra il perimetro P_n e il lato del poligono *sono tutti algebrici*[6]. *L'operazione di limite ci porta dunque fuori degli algebrici*. Peraltro, π può essere approssimato quanto si vuole da algebrici (e anche da razionali). La successione stessa dei P_n, se non altro, ne fornisce un'approssimazione a qualsivoglia livello di precisione (basta che n sia sufficientemente alto, ciò corrisponda ad un poligono con abbastanza lati).

E' nota la rappresentazione decimale dei reali. Per limitarsi a quelli compresi tra 0 e 1:

$$0,a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots \infty$$

Ricordiamo che questa scrittura significa: $0+a_1\cdot 10^{-1}+a_2\cdot 10^{-2}+\ldots+a_n\cdot 10^{-n}+\ldots$ Si tratta dunque di una *serie* (convergente) il cui termine è (rapidamente) decrescente.

Guardando le cose in questo modo, si può dire che un reale è una “infinitupla”' numerabile di cifre decimali, cioè *un numero intero di lunghezza eventualmente infinita*.

Si può dimostrare che i reali sono più degli interi[7], perché qualunque sistema di conteggio ne lascerebbe sempre fuori infiniti. Dunque la cardinalità dei reali è

6 Si calcolano a furia di radici quadrate e teoremi di Pitagora sui triangoli che costituiscono gli spicchi dei poligoni.

7 *Il procedimento diagonale di Cantor* dimostra proprio la non numerabilità dei numeri reali compresi tra 0 e 1 facendo uso della loro rappresentazione decimale.

strettamente superiore a quella degli interi, ad $\aleph_0$.

D'altra parte, se si guarda di nuovo alla rappresentazione decimale dei reali, si nota che essi sono sostanzialmente l'insieme di tutti i sottoinsiemi degli interi (ovvero, il cosiddetto *insieme delle parti* degli interi).

Nel caso degli insiemi numerabili finiti di cardinalità N, l'insieme delle parti ha cardinalità 2^N. La cardinalità dei reali, che sono l'insieme delle parti degli interi, è dunque pari a $2^{\aleph_0}$, detta anche *potenza del continuo.*

Il motivo di questa denominazione sta nella circostanza che i numeri reali definiscono sulla retta (o su di un segmento, il solito 0,1), una volta là collocati in ordine crescente, un *insieme continuo*, cioè privo di buchi anche infinitesimi (si dice anche: completo). Se ci limitassimo a collocare gli algebrici, avremmo infiniti buchi (di una infinità più che numerabile) in tutti i posti dove dovrebbe trovare posto un trascendente (come π ad esempio), anche se vicino a questi buchi si troverebbero infiniti irrazionali o razionali approssimanti, vicini quanto si voglia al trascendente da approssimare.

Nella notazione decimale i numeri razionali sono esprimibili con un numero finito o *periodico*[8] di cifre. I numeri propriamente algebrici e trascendenti (i numeri irrazionali) *non sono periodici*, e richiedono quindi sempre un numero infinito di cifre decimali.

Queste nozioni sono importanti perché definiscono lo spartiacque tra sistemi continui e sistemi discreti.

I calcolatori elettronici sono sistemi discreti finiti (*cioè numerici)* e pertanto, come avremo modo di approfondire, sono limitati entro un mondo non solo finito, ma anche intero. Ad essi sfugge in linea di principio il continuo.

I sistemi analogici (come i sintetizzatori analogici, ad esempio) sono invece sistemi continui, anche se finiti.

Tra i due mondi esistono differenze profonde, che dipendono proprio dall'essere l'uno discreto, l'altro continuo. Queste differenze, con importanti implicazioni musicali, saranno evidenti trattando i sistemi campionati nel tempo.

9 Numeri, calcolatori e caso.

I calcolatori elettronici sono macchine a stati dotate di memoria (*macchine di Turing*) ma, a differenza di queste ultime, la loro memoria è finita. La rappresentazione dei numeri è per questo *intera,* discreta, e finita. *Non c'è modo di rappresentare il continuo in una siffatta macchina*, ma solo di approssimarlo. Uno dei possibili modi, come abbiamo visto, è quello di usare i razionali, che

8 Se un numero ha la parte frazionaria periodica, è sempre esprimibile con un numero finito di segni: le cifre del periodo più il segno convenzionale di “periodico”, “ripetere indefinitamente”.

possono essere vicini quanto si voglia ai reali, restando però discreti. Inoltre, data la finitezza, potremo rappresentare solo *un numero finito* di razionali. Quanti siano i razionali rappresentabili, e quindi quale sia la “granularità” dell'approssimazione del continuo *dipende dalla lunghezza dei registri di memoria* usati nella rappresentazione.

Un buon modo di rappresentare i razionali è *la notazione in virgola flottante (floating point)*, con la quale il razionale r è espresso, anziché nella più consueta notazione frazionaria (come quoziente tra due interi), come una mantissa (intera) per una base elevata ad un esponente (intero). La granularità della espressione è variabile: la lunghezza della mantissa determina il grano elementare (il *bit*), che deve essere moltiplicato per l'esponenziale. Abbiamo così una granularità proporzionale alla grandezza del numero, anziché fissa (come avverrebbe in una notazione puramente intera, cioè in *virgola fissa*), il che è un vantaggio di ordine pratico. La granularità *minima* è determinata dal più piccolo incremento esprimibile, con esponente 0. Essa è dunque pari a 10^{-N}, dove N è il numero di cifre significative a disposizione. In un moderno calcolatore dotato di unità specializzata per la virgola mobile (la FPU, *Floating Point Unit*) senza particolari artifici si raggiungono le 17 cifre decimali. Quindi il “quanto” numerico minimo è pari a 10^{-17}, e questa è la discretizzazione dei numeri compresi tra 0 e 1. Questi sono dunque in totale 10^{17}, e sono tutti i razionali esprimibili compresi tra 0 e 1, per restare alla forma usuale di rapporto tra due interi, come:

$$\frac{n}{10^{17}} \quad n=0,1,\ldots,10^{17}$$

Il numero totale di razionali esprimibili è dunque questo (10^{17}) moltiplicato per il numero di esponenti possibili. Nello standard citato essi sono 256 (da -127 a +128). Quindi il numero totale di razionali esprimibili è: $256 \cdot 10^{17} = 2{,}56 \cdot 10^{19}$.

Naturalmente stiamo qui parlando di una rappresentazione *nativa*, tecnicamente conveniente perché nella macchina è stato tutto predisposto per il calcolo (rapido) di numeri di questa lunghezza. Niente vieta però di adottare anche rappresentazioni più lunghe: in tal caso il limite è dato dalla lunghezza totale della memoria, che nei moderni calcolatori può raggiungere valori notevoli. In questo caso, ovviamente, dobbiamo aspettarci che i calcoli diventino più lunghi, non solo in seguito alla maggiore lunghezza dei numeri stessi, ma anche per il fatto che non possiamo usare direttamente i meccanismi nativi (e quindi efficienti) quali la FPU. Potremo sempre servircene, ma per scomporre il nostro calcolo in *più* calcoli nativi, perdendo ulteriore tempo nell'operazione di composizione e scomposizione. Esistono librerie software per eseguire i calcoli in quella che viene chiamata “precisione arbitraria”, ovvero scelta dall'utente (in contrapposizione a quella nativa, che dipende strettamente dall'*hardware* del calcolatore utilizzato). Per quanto arbitraria, è opportuno ricordare che sarà sempre *finita,* limitata dalle dimensioni di memoria utilizzabili (e ancor più dai tempi di calcolo che devono restare umani). Dal punto di vista di principio, quindi, nulla cambia rispetto al nostro discorso[9].

Si deve notare che in un sistema numerico esistono comunque alcuni razionali non rappresentabili: si tratta dei razionali periodici. Ad esempio, $1/3=0{,}333\ldots=0{,}\overline{3}$. La cosa non è grave: questi numeri vengono approssimati al razionale più vicino *non periodico* (nel nostro esempio con zero virgola 17 volte tre). L'errore resta comunque compreso entro “la grana”'. Dato che identifichiamo tutti i numeri compresi entro l'intervallino definito dalla grana con uno di essi, non ha molta importanza quale di loro si scelga per rappresentare l'intervallino.

La natura intera delle macchine di Turing ha una conseguenza molto importante: dato che gli stati (anche quelli iniziali) di un qualunque processo sono descritti con un numero intero (o con un numero finito di razionali, il che è lo stesso, perché è comunque definita una “grana” minima, un “salto”' o un “vuoto” tra un numero e l'altro), la determinazione dello stato iniziale non è soggetta a nessuna approssimazione o “errore di misura”'. *E' quindi sempre possibile rimettere un sistema siffatto nello stesso identico stato iniziale*.

Dato che abbiamo a che fare con sistemi deterministici (salvo guasti o interventi *esterni*), ne risulta che è sempre possibile fare ripercorrere ad un sistema esattamente lo stesso cammino, la stessa evoluzione. Dunque i sistemi numerici *non sono caotici*. Questo è una diretta conseguenza del fatto che non sono continui.

Dato però che possono approssimare, entro i limiti della loro “grana”, i sistemi continui, possono sempre negli stessi limiti “approssimare” (simulare) il comportamento di un sistema caotico. Ma non potranno mai riprodurlo *esattamente*. Data la caratteristica dei sistemi caotici, questo significa che non è garantito che possano descrivere con sufficiente precisione le traiettorie di sistemi caotici (continui)[10], anche se possono riprodurne molto bene determinate proprietà statistiche.

E' questo il motivo per il quale gli algoritmi di simulazione del lancio di un dado, i cosiddetti *generatori di numeri casuali*, nei calcolatori prendono il nome di *generatori di numeri pseudorandom*. Si tratta di sequenze di numeri (di lanci di dadi) che *somigliano statisticamente* a dei lanci casuali, *ma effettivamente non lo sono*. Infatti, non essendo caotiche, tali sequenze sono *prevedibili*, a differenza di quelle vere. Nessuno si sognerebbe quindi di adottare un tale lancia-

---

9 Una libreria in precisione arbitraria Open Source è *GMP*, *Gnu Multiple Precision*, “Arithmetic without limitations”. “GMP is a free library for arbitrary precision arithmetic, operating on signed integers, rational numbers, and floating point numbers. There is no practical limit to the precision except the ones implied by the available memory in the machine GMP runs on” http://www.swox.com/gmp/

10 La possibilità di descrivere sistemi caotici mediante sistemi numerici è un problema aperto, oggetto di ricerca. Si tratta del “Pursuit Lemma”, che è stato provato in alcuni casi particolari. Esso asserisce che data una traiettoria di un sistema continuo, esiste sempre una particolare condizione iniziale del sistema numerico che lo simula che genera una traiettoria che resta vicina a quella del sistema continuo entro un intervallo prestabilito comunque piccolo.

tore di numeri causali in una casa da gioco: sarebbe sbancata dal primo avventore in grado di scoprire quale sia l'algoritmo utilizzato[11].

Inoltre, qualunque algoritmo numerico generi sequenze di numeri, genererà sempre sequenze *periodiche*[12]. Attendere la periodicità non è detto sia però un buon metodo per scoprire la sequenza: il periodo, per quanto necessariamente finito, può essere reso lungo a piacere, anche miliardi di anni[13].

http://www.mnt-aq.it
Versione: 2.4 del 16 maggio 2009
Testi, formule e figure: OpenOffice
Grafici, calcoli: Scilab
Calcolo simbolico: Maxima

---

11 Ed è questo anche il motivo per il quale i programmi protetti contro l'uso abusivo (da algoritmi di cifratura basati su numeri pseudocasuali) sono tutti - come si dice in gergo - "crackabili".

12 Il massimo che si possa fare, essendo costretti a generare dei razionali, è generare un razionale periodico.

13 La lunghezza del massimo periodo ottenibile è pari al numero degli stati del sistema, che dipendono dalla quantità di memoria. Se N è il numero di bit totali della memoria, gli stati possibili sono 2^N